浅谈《线性代数》课程的案例教学

李红霞

（上海海事大学 文理学院　上海　201306）

摘要：本文对《线性代数》课程中的案例教学法进行探究。通过实例，阐述了案例教学的必要性和具体实施办法。旨在以应用促进理论的理解与掌握，以应用激发大学生的学习兴趣和创造力。

关键词：线性代数；案例教学；线性方程组

1. 案例教学的必要性

线性代数是高等院校理工科院系以及经济管理等专业开设的一门公共基础课。目前一般大学的授课中，受课时或传统教学理念的影响，采取的教学内容基本是以理论介绍为主，再辅以例题、习题讲解。即教学过程重理论和计算，轻应用和实践。理论是学好一门课程的必要基础，地位是坚定不可动摇的；计算是对所学理论的巩固过程，亦不可或缺。但若在课堂上只强调这两点，则对于线性代数这类比较抽象且理论性较强的课程来讲，会显得过于枯燥。随着理论学习的不断深入，课堂往往会变成老师一个人的独角戏。为了打破这种的困境，[1][2][3][4]等分别对线性代数的教学改革进行了积极的探索。

案例教学法一方面可以调动大学生学习的积极性，提高课堂互动和学习效率；另一方面，以应用为导向的知识学习符合当下“新工科”建设培养具有创新能力的复合型人才的要求。基于以上原因，在线性代数的课堂教学中采用案例教学是十分必要的。

2. 案例举例

本文以线性代数课程中三个比较重要的知识点：逆矩阵、线性方程组、实对称矩阵的对角化为例，具体介绍了各案例的解法、教学实施方法，以及 Matlab 操作演示。

2.1 逆矩阵

矩阵的逆矩阵是矩阵理论中必不可少的部分，它的存在弥补了矩阵运算中没有除法运算的缺憾。逆矩阵不仅在线性代数课程体系中有重要应用，如：求解线性方程组、解矩阵方程、对角化等问题。此外，在工程等方面也有广泛应用，如弹性矩阵等。但逆矩阵的求解过程较为繁琐，学习中学生容易产生畏难情绪。在教学中，我们可以引入下面的信息加密、解密的案例。

案例 1. 利用希尔加密算法，将信息“I LOVE SHMTU”进行加密和解密。

具体解法：

(1) 建立 26 个英文字母与 1–26 的自然数之间的对应如下：

$A \to 1, B \to 2, \cdots, Z \to 26$

(2)找出“I LOVE SHMTU”对应的数字序列（其中空格用 0 填充）“9、0、12、15、22、5、0、19、8、13、20、21”。将这 12 个数字四个为一组，按行排成三行四列矩阵 A（也称为明文）.

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 & 15 \\ 22 & 5 & 0 & 19 \\ 8 & 13 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

(3) 构造密钥矩阵 P

为便于计算，构造时一般使 P 的行列式为 1 或–1，元素为整数，以保证其可逆且逆矩阵的元素仍为整数。此处取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

(4)　　加密

$$B=PA=\begin{pmatrix} 17 & 13 & 32 & 36 \\ 56 & 31 & 64 & 91 \\ 25 & 26 & 52 & 57 \end{pmatrix}$$

(5)　　解密

解密方通过已知的密钥矩阵 P，先求出解密密钥 $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，再通过矩阵乘法 $P^{-1}B=P^{-1}(PA)=A$ 得到明文，从而得到信息“I LOVE SHMTU”。

教学实施：在教学中，教师可以鼓励学生分组动手设计信息，并将其加密，然后把加密后的信息和加密矩阵传递给另一组同学，进行解密游戏练习。通过引入类似的应用案例教学设计，不仅起到了很好的练习效果，而且也提高了大家课程学习的积极性，克服了对抽象知识的畏难情绪。

Matlab 操作演示

```
>> A=[9,0,12,15;22,5,0,19;8,13,20,21];
>>P=[1,0,1;2,1,2;1,0,2];
>>B=P*A
B=
17   13   32   36
56   31   64   91
25   26   52   57
>>inv(P)
ans=
2   0   -1
-2   1   0
-1   0   1
>>inv(P)*B
9    0    12    15
22   5    0     19
8    13   20    21
```

2.2 线性方程组的求解和应用

线性方程组的解是线性代数研究的主要问题。具体包括如何求解、解的存在性判定、通解的表示三个方面。在教学中，所使用的例题和习题常常是针对给定的线性方程组进行求解和讨论，而忽略了线性方程组的实际背景。此外，例题主要起到了训练解题方法和技巧，而忽略了根据实际问题来建立线性方程组的能力培养。

事实上，很多实际问题都可以归纳为线性方程组的求解问题。例如：分析某个道理区域内的交通流量；计算插值多项式；投入产出问题；电阻电路的计算等等。很多非线性的问题也可以转化为线性问题，进而转化为线性方程组的求解问题。鉴于线性方程组应用如此广泛，在授课过程中，可以适当引入实际案例。一方面，可以培养学生由具体问题建立线性方程组模型的建模思想；另一方面，通过应用线性方程组解决和解释实际问题，也可以体现知识学习过程中的“知行合一”。

案例 2 假设某城市有一单行道路区域如图。其中 A,B,C,D 分别代表该块道路区域的四个十字路口。已知驶入和驶出该道路区域的车流量如图 1 所示，求在各个十字路口间的车流量（假设进入和离开每个十字路口的车辆数是相等的）。

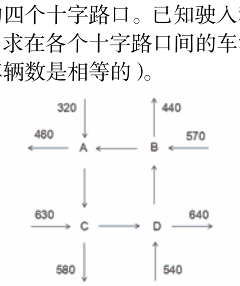

图1

具体解法：

(1) 设 $D \to A$、$A \to B$、$B \to C$、$C \to D$ 各路段的车流量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4。先根据各个十字路口的车流量以及每个路口处流入和流出的车辆数相等的条件列出平衡方程：

$$\begin{cases} x_1+320=x_2+460 \\ x_2+630=x_3+580 \\ x_3+480=x_4+640 \\ x_4+570=x_1+320 \end{cases}$$

(2) 整理并求解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 250 \\ 110 \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 其中 k 为任意实数。

(3) 由方程组的解可知各路段的车流量分别为：

$$\begin{cases} 250+k, & D\to A \\ 110+k, & A\to B \\ 160+k, & B\to C \\ k, & C\to D \end{cases}$$

其中任意实数 k 所在的项可解释为：有 k 辆车在围绕 A,B,C,D 四个十字路口做逆时针绕行，这种车的数量取值是可以不确定的，从而导致方程组有无穷多组解。

教学实施：

在教学中，教师可以先给出案例 2 的问题。在求解、解的存在性判定、通解的表示这三个方面的理论知识学习完毕后，再求解案例 2，并根据求得的解来解释如何去解决实际问题。

教师也可以鼓励学生自己按条件构造数据，分组完成线性方程组的构建和化简、初等行变换求解线性方程组、根据求得的解来解释实际问题等工作。当然，如果数据选取得不合理，可能会导致无解。因此，求解时应注意提醒学生检验解的存在性。

Matlab 操作演示：

```
>> A=[1,-1,0,0;0,1,-1,0;0,0,1,-1;-1,0,0,1];
>>b=[140;-50;160;-250];
>>U0=rref([A,b])
U0
1   0   0   -1   250
0   1   0   -1   110
0   0   1   -1   160
0   0   0   0    0
```

2.3 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵的对角化与矩阵的特征值、特征向量密切相关。其对角化方法可分为通过正

交矩阵对角化和通过一般的的可逆矩阵对角化两种，具体理论这里不做赘述。对角化问题有着广泛的应用，例如在线性代数的课程教学中介绍过的求矩阵的高次幂，计算矩阵多项式，二次型化标准型等。在几何上，可以用来研究二次曲线及二次曲面的类型等。此外，实对称矩阵对角化理论还被应用于很多领域的研究中，例如研究人口迁徙规律等。这里以食堂就餐问题为例，进行说明。

案例 4. 设某高校有两个食堂 A、B。学校总人数为 10000 人，假设大家都在校内用餐。

最初去 A 食堂的有 4000 人，去 B 食堂的为 6000 人。随着两个食堂的菜品创新和变化，每个月有 20%的同学会由 A 食堂转移到 B 食堂用餐，而 20%的同学会由 B 食堂转移到 A 食堂用餐。那么长期来讲，在两个食堂用餐的人数是否会达到平衡?平衡后，在各食堂用餐的人数是多少？如果去两个食堂用餐的初始人数发生变化，那么结果是否也会发生变化？

具体解法：

(1)建立迁移矩阵和初始向量

$$A=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

(2)将矩阵 A 对角化

因为

$$x_1=Ax_0,\cdots,x_k=Ax_{k-1}=\cdots=A^kx_0,$$

其中 x_k 即为第 k 个月后在 A、B 两食堂的用餐人数向量。显然，要计算 x_k 就需要计算 A^k。而 A 为实对称矩阵，因此这里可以先将 A 对角化。过程如下：

由特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.8-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-0.6)(\lambda-1)$$

得特征值 $\lambda_1=0.6,\lambda_2=1$，相应的特征向量分别为 $p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。构造矩阵

$$P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

则由对角化理论可知 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。注：本题只需求出可逆阵 P 即可。

(3)求出向量 x_k

$$x_k=A^kx_0=(P\Lambda^kP^{-1})x_0=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+0.6^k & 1-0.6^k \\ 1-0.6^k & 1+0.6^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

因为 $\lim\limits_{k\to+\infty}0.6^k=0$，所以 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$。

(4)结论:两个食堂的人数长期来讲会趋于稳定，稳定时每个食堂的就餐人数各 5000 人。由计算过程可知，当去两个食堂用餐的初始人数发生改变，而其它数据不变时，结果是不变的。

教学实施：

教学中，首先要准确表出迁徙矩阵，以及前后两个月就餐人数分布的关系式。启发学生如何将对角化理论应用于解题过程。同时要注意当矩阵 A 不是实对称矩阵时，其未必可以对角化，从而方法失效。因此，在选取数据时，要注意检验矩阵是否可以对角化。通过本案例的思想还可以引导学生对三个食堂的情况进行研究，也可以观察生活中是否还有类似的问题。从而培养数学建模的意识，为创新思维和能力的培养奠定基础。

Matlab 操作演示

```
>> A=[0.8,0.2;0.2,0.8];
>>[P,lambda]=eig(A);
P=
        -0.7071   0.7071
0.7071   0.7071
lambda =
0.6000     0
0          1.0000
>>V=[0,0;1,0];
>>x_0=[4000;6000];
>>P*V*inv(P)*x_0
5000
5000
```

3. 结语

本文旨在通过在课堂中引入与典型理论相关的案例，引导学生在学习中积极思考，培养工科院校学生理论联系实际和创新创业的能力。所列举的案例，难度适合课堂教学完成。而且，针对每一案例均给出了具体的 Matlab 操作演示，在推进应用的同时，还起到了培养大学生计算机操作能力和素养的作用。《线性代数》课程中的案例教学是其教学改革的重要组成部分，身为一线教师，应在实践中不断摸索和尝试，使案例更加完善、可行。

参考文献

[1]马晓玢,陆芳龄,杨静.“新工科”建设背景下线性代数课程教学改革探索[J].南昌师范学院学报, 2020,41(03).

[2]邵晶. 基于不同专业需要的《线性代数》课程改革研究 ⋆———以济宁学院《线性代数》课程改革为例[J].曲阜师范大学学报,2016,42(4).

[3]徐阳. 大数据视角下线性代数课程教学改革探究[J].教育教学论坛, 2020,(37).

[4]曲霞. 小议高校线性代数教学改革途径[J].山西青年, 2020(11).