英语试卷七选五得零分的排列问题

张瑞

（江苏省奔牛高级中学 213131）

摘要：英语试卷中的七选五得零分的排列问题是学生在学习排列组合知识后主动提出的问题，教师引导学生以退为进，解决了 n 元全错位排列及其排列数问题，并探究了 n 选 m 全错位排列问题及其排列数的递推关系式，促进了学生的深度学习.

关键词：全错位排列；排列数；深度学习

1 问题的提出

近期，笔者在教学排列与组合时，有学生创造性地提出一个问题：英语试卷中的七选五的试题中如果随机选择五个选项填空，则得零分的情况有多少种？

这个问题迅速点燃了班级学生的研究热情，为了帮助同学们解决这个问题，笔者引导学生先将问题进行转化，发现问题的本质是全错位排列问题，然后以退为进从简单的问题入手去发现研究该问题的基本思路.在同学们的共同努力下终于解决了这个问题.

首先将这个问题转化为：将编号为 1，2，3，4，5，6，7 的七个大小、形状完全相同的小球放入编号为 1，2，3，4，5 的五个盒子中，每个盒子只放一个小球.则小球的编号与盒子的编号都不相同的放法有多少种？

2 探究 n 元全错位排列问题

华罗庚曾经说过：“先足够地退，退到最简单的情况，退到我们容易看清楚的地方，认透了，钻深了，然后再上去.”这是解决数学问题的一个有效的方法.

2.1 第一次退，将“n 选 m 全错位排列问题”退到“n 元全错位排列问题”.

将编号为 1，2，3，…，n 的 n 个小球放入编号为 1，2，3，…，n 的 n 个盒子中，每个盒子放一个小球，且每一个小球与盒子编号不同的放球方法有多少种？”简称“n 元全错位排列问题”，对应的排列数记为 F_n.

要求 F_n 显然不是一件容易的事情，我们不妨先求 F_2, F_3, F_4 和 F_5.

2.2 第二次退，将求 F_n 的问题退到求 F_2, F_3, F_4 和 F_5.

学生活动：列举可得 $F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=9$.

下面解决 F_5：

学生 1：先放 1 号盒子，有 4 种放球方法，比如放的是 2 号小球.再放 2 号盒子，需要分两类完成，一类是 2 号盒子放 1 号球，问题化为 3 元全错位排列问题，所以有 $F_3=2$ 种情况（如图 1）；第二类是 2 号盒子放的不是 1 号小球，则有 $C_3^1C_3^1=9$ 情况.所以 $F_5=4\times(2+9)=44$（如图 2）.

盒子	1	2	3	4	5
小球	2	1			

（图 1）

盒子	1	2	3	4	5
小球	2				

（图 2）

2.3 第一次进，探究 F_n 的递推式.

问题 1：从上述解答过程中，你有什么发现？

学生 2：从列举出来的结果上看，$F_5=4\times(F_4+F_3)$，$F_4=3\times(F_3+F_2)$，猜想：$F_n=(n-1)\times(F_{n-1}+F_{n-2})$ $(n\geq 4)$.

学生 3：我类似于 F_5 的计算过程，算出 $F_6=265$.进一步猜想：$F_n=nF_{n-1}+(-1)^n$ $(n\geq 3)$.

学生 4：从求 F_5 的过程中我们发现，只要分两步即可.第一步放 1 号盒子，有 n–1 种放法，比如放入的是 2 号小球.第二步放 2 号盒子，现在需要对 2 号盒子的小球分两类完成，一类是 2 号盒子放入 1 号小球，则问题转化为 n–2 元全错位排列问题，有 F_{n-2} 种排列方法（如图 3）；另一类是 2 号盒子放入非 1 号小球，则相当于 n–1 元全错位排列问题，有 F_{n-1} 种排列方法（如图 4）.根据分类计数和分步计数原理可知 $F_n=(n-1)\times(F_{n-1}+F_{n-2})$.

盒子	1	2	…	n–1	n–2
小球	2	1	…		

（图 3）

盒子	1	2	…	n–1	n–2
小球	2		…		

（图 4）

2.4 第二次进，探究 F_n 的通项公式.

问题 2：我们已经得到了 F_n 的递推式，那么是否可以得到 F_n 的通项公式？

学生 5：从递推式 $F_n=nF_{n-1}+(-1)^n$ 出发，两边同时除以 $n!$，则 $\frac{F_n}{n!}-\frac{F_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$ $(n\geq 3)$，利用数列通项公式的累加法可以得到 $\frac{F_n}{n!}=\frac{1}{2}+\sum_{i=3}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$.即

$$F_n = n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

学生6：从递推式 $F_n=(n-1)\times(F_{n-1}+F_{n-2})$ 出发，两边同除 $n!$，得 $\frac{F_n}{n!}=\frac{n-1}{n}\frac{F_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\frac{F_{n-2}}{(n-2)!}$，记 $a_n=\frac{F_n}{n!}$，则 $a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}+\frac{1}{n}a_{n-2}$，所以 $\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}=-\frac{1}{n}$，累乘可得 $\frac{a_n-a_{n-1}}{a_3-a_2}=(-1)^{n-3}\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdots4}$，因为 $a_3-a_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$，所以 $a_n-a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}$，以下同学生5解法.

3 探究 n 选 m 全错位排列问题

类似于 n 元全错位排列问题的研究，先将七选五错位排列问题一般化：将编号为1，2，3，…，m,m+1，…，$n(n\geq m)$ 的 m 个小球放入编号为1，2，3，…，m 的 m 个的盒子中，每个盒子放一个小球，且每一个小球与盒子编号不同的放球方法有多少种？”简称“n 选 m 全错位排列问题”，对应的排列数记为 F_n^m.显然，七选五全错位排列的排列数为 F_7^5.

3.1 探究 F_7^5 的值.

有了 n 元全错位排列问题的探究活动经验，对于七选五全错位排列问题学生就比较容易上手了.

学生7：我对盒子中是否含有6、7号球分三类.第一类，不含有6、7号小球，有 $F_5=44$ 种；第二类，含有6、7号球中的一个，放6号或者7号小球有 $C_2^1C_5^1$ 种，比如6号球放在1号盒子，此时问题转化为将1，2，3，4，5号五个小球放入2，3，4，5号盒子中，所以有 $F_5^4=53$ 种，因此共有 $C_2^1C_5^1F_5^4=530$ 种；第三类，将6、7号球都放入盒子中，有 A_5^2 种，比如6、7号球分别放在1、2号盒子，此时问题转化为将1，2，3，4，5号五个小球放入3，4，5号盒子中，有 $F_5^3=32$ 种，因此共有 $A_5^2F_5^3=640$ 种.根据分类计数原理，$F_7^5=44+530+640=1214$.

学生8：我对1号盒子放入的小球编号类型分两类.第一类，1号盒子放6号或者7号小球，有2种，比如6号小球放入1号盒子，这样一来问题就转化为将7，1，2，3，4，5号小球放入2，3，4，5号盒子，所以有 F_6^4 种，进一步分类列举可以求出 $F_6^4=181$，所以有 $2F_6^4=362$ 种；第二类，1号盒子放2，3，4，5号小球，有4种，比如2号小球放入1号盒子中，接下来将1，6，7，3，4，5号小球放入3，4，5号盒子中，有 F_6^3 种，列举可以得 $F_6^3=71$，最后将剩下的3个小球放入2号盒子，所以共有 $4\times3\times F_6^3=12\times71=852$ 种.根据分类计数原理，$F_7^5=362+852=1214$.

学生惊叹：英语七选五得零分竟然有1214种可能，可见要想考出好分数不能心存侥幸，而应该脚踏实地地去学习才行.

3.2 探究 F_n^m 的递推关系式.

问题3：结合上述求 F_n 和 F_7^5 的过程，能否找到 F_n^m 的地推关系式呢?

学生9：类似于学生7求 F_7^5 的过程，可以对放入1号盒子的小球分两类.第一类，1号盒子放编号为 m+1，m+2，…，n 的小球，有 n–m 种情况，比如放的是 n 号小球，问题化为把1，2，3，…，m，m+1，…，n–1号小球放入编号为2，3，…，m 的盒子中，有 F_{n-1}^{m-1} 种，所以共有 $(n-m)F_{n-1}^{m-1}$ 种；第二类，1号盒子放编号为2，3，…，m 的小球，有 m–1种，比如放的是2号小球，接下来把编号为1，3，4，…，m，m+1，…，n 的小球放入编号为3，4，…，m 的盒子中，有 F_{n-1}^{m-2} 种，最后把剩下的 n–m+1个小球放入编号为2的盒子中，有 n–m+1种，所以共有 $(m-1)(n-m+1)F_{n-1}^{m-2}$ 种情况.综上可知，$F_n^m=(n-m)F_{n-1}^{m-1}+(m-1)(n-m+1)F_{n-1}^{m-2}$.

4 教后反思

《普通高中数学课程标准（2017年版）》强调：提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力[1].那么在我们日常生活中如何培养学生的“四能”呢？笔者认为首先要保护好学生的好奇心，面对学生提出的“稀奇古怪”的问题应主动与学生一起探究，并教给学生研究数学问题的基本方法，多一些启发性的提问，对于较困难的问题要鼓励学生交流合作、主动探究、查阅资料等，而不是把结果直接告诉学生.教师循循善诱，学生欲罢不能，全身心投入学习中，追随教师去追求学问和人格的更高境界[2].好的问题就是好的老师.一方面可以激发学生学习数学的兴趣，一个人的提问可以带动一群人的思考，在教学排列组合这一章时笔者发现很多平时不太喜欢数学的学生也能积极地参与到课堂中，排列组合问题重新点燃了孩子们学习数学的热情，在这里他们获得了学好数学的新希望.另一方面，在数学探究的过程中促进学生深度学习，学生在学习了排列组合的知识后能够用数学的思维去思考学习生活中的数学问题（英语七选五得零分的情况数），用数学的语言去表达自己的思考（将英语七选五问题转化为全错位排列问题，并引进符号来表示相应的排列数）.总之，真正好的数学教学应该关注学生学习后的发展性，这也是深度学习的核心特征.

参考文献：

[1] 普通高中数学课程标准（2017年版 2020年修订）[S].北京：人民教育出版社，2018：81.

[2] 郭华.如何理解“深度学习”[J].四川师范大学学报（社会科学版），2020（1）：89−95.

作者简介：张瑞（1986—），男，中学一级教师，常州市骨干教师，主要从事高中数学教学研究.