关于费马大定理的简单研究

A Simple Study of Fermat's Great Theorem

阿卜杜热伊木·穆萨江

（华东师范大学（大四学生）　新疆和田地区　848303）

摘要：通过对勾股数的形式结构的研究，推出勾股数的一般表达式。然后把 n 次不定方程转换成，二次方程。再通过勾股数一般表达式去证明费马大定理。

关键词：勾股数；费马大定理；研究

一、关于勾股数的研究

（一）勾股数的形式结构

我们通常把不定方程$x^2+y^2=z^2\ \ (x,y,z\epsilon N)$的解称为勾股数。

不妨设 $x<y<z$ 且$(x,y,z)=1$，则

$x^2=(z+y)(z-y)$ ……………………（1）

显然$(z-y)<x<(z+y)$所以有

$(z-y)|x$ 且 $x|(z+y)$.…………（2）

设

$$\begin{cases} y=k_1x+t_1 & (k_1,k_2\in N^*) \\ z=k_2x+t_2 & (t_1,t_2\in N^*,t_1,t_2<x) \end{cases} \quad \cdots\cdots(3)$$

由（2）和（3）可得：

$x|(z+y)=(k+k_2)x+(t_1+t_2)$ 且$1<t_1+t_2<2x$

即 $t_1+t_2=x$ ………………………（4）

由（1）和（3）可得：

$x^2=z^2-y^2=(k_2^2-k_1^2)x^2+2(k_2t_2-k_1t_1)x+(t_2^2-t_1^2)$ ….（5）

1）当$k_2^2-k_1^2=1$时：

$$\begin{cases} k_2^2-k_1^2=1 \\ k_2t_2-k_1t_1=0 \\ t_2^2-t_1^2=0 \\ k_1,k_2\in N^* \\ t_1,t_2\in N^*,t_1,t_2<x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_2=1\ ,\mathrm{k}_1=0 \\ t_1=t_2=0 \\ k_1,k_2\in N^*, \\ t_1,t_2\in N^*,t_1,t_2<x \end{cases}$$

由此可得，当$k_2^2-k_1^2=1$时，方程无解。

2）当 $k_2^2-k_1^2=0$时：

$$\begin{cases} k_2^2-k_1^2=0 \quad \text{即：} k_2=k_1=k \\ 2(k_2t_2-k_1t_1)x+(t_2^2-t_1^2)=x^2 \end{cases}$$

将（4）代入上式得：

$2k(t_2-t_1)x+(t_2-t_1)x=x^2$

$\Rightarrow\ \ t_2-t_1=\frac{x}{2k+1}\ \ ,(k\geq 1)$ ………………（6）

结论：

$$\begin{cases} y=kx+t_1 & (k\in N^*) \\ z=kx+t_2 & (t_1,t_2\in N^*) \\ t_1+t_2=x \\ t_2-t_1=\frac{x}{2k+1} \end{cases} \quad \ldots.(7)$$

（二）勾股数的一般表达式

由$t_2-t_1=\frac{x}{2k+1}\epsilon N^*$可知，仅当 x 有不为 1 的奇数因子时，（7）中表达式成立。

又∵ x 有不为 1 的奇数因子⇔ $x\neq 2^m$

1）当$x\neq 2^m$时:【由（7）可得】

$t_2=t_1+\frac{x}{2k+1}$

$\therefore\ \ x^2=\left[kx+\left(t_1+\frac{x}{2k+1}\right)\right]^2-(kx+t_1)^2$

$=\left(2kx+2t_1+\frac{x}{2k+1}\right)\cdot\frac{x}{2k+1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} t_1=\frac{k}{2k+1}x \\ t_2=\frac{k+1}{2k+1}x \end{cases} \quad \ldots\ldots(8)$$

$$\therefore \text{当 } x\neq 2^m \text{ 时：}\begin{cases} x=x \\ y=kx+t_1=\frac{2k^2+2k}{2k+1}x\ , & (k\in N^*) \\ z=kx+t_2=\frac{2k^2+2k+1}{2k+1}x \end{cases} \quad \ldots..(9)$$

2）当$x=2^m$时：

$(2^m)^2=(z+y)(z-y)$

所以可推测出：

$$\begin{cases} z+y=2^s \\ z-y=2^{2m-s} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=2^{s-1}-2^{2m-s-1} \\ z=2^{s-1}+2^{2m-s-1} \end{cases} \quad ..(10)$$

$$\begin{cases} s-1\geq 2 \\ 2m-S-1\geq 1 \end{cases} \quad \text{解得：} m\geq\left\lceil\frac{5}{2}\right\rceil=3 \quad \text{即 } x\geqslant 8$$

结论：

由（9），（10）可知，给定的$\forall x\in N^*$且$x\geq 3\ ,x\neq 4$，必存在$y,z\in N^*$使得$x^2+y^2=z^2$成立。而且这样的y,z不一定只有一组。形式如下：

$$\begin{cases} \text{当 } x\neq 2^m \text{ 时：} \begin{cases} x=x \\ y=kx+t_1=\frac{2k^2+2k}{2k+1}x\ , & (k\in N^*) \\ z=kx+t_2=\frac{2k^2+2k+1}{2k+1}x \end{cases} \\ \text{当 } x=2^m \text{ 时：} \begin{cases} x=2^m \\ y=2^{s-1}-2^{2m-s-1}\ , & (m\geq 3) \\ z=2^{s-1}+2^{2m-s-1} \end{cases} \end{cases} \quad .(11)$$

二、费马大定理的研究

对于不定方程$x^n+y^n=z^n$，　$(n\geq 3)$，将它可转化为：

$\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2+\left(y^{\frac{n}{2}}\right)^2=\left(z^{\frac{n}{2}}\right)^2$

由（11）可得：

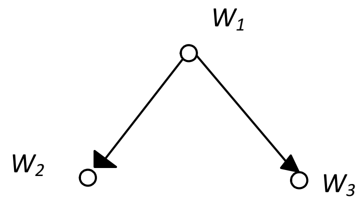
1）当$x\neq 2^m$时：

$y^{\frac{n}{2}}=\frac{2k^2+2k}{2k+1}x^{\frac{n}{2}}$，$z^{\frac{n}{2}}=\frac{2k^2+2k+1}{2k+1}x^{\frac{n}{2}}$

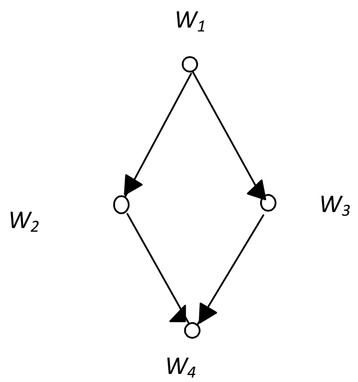
$$\text{即：}\begin{cases} y=\sqrt[\frac{2}{n}]{\frac{2k^2+2k}{2k+1}}x\ , & (k\in N^x) \\ z=\sqrt[\frac{2}{n}]{\frac{2k^2+2k+1}{2k+1}}x \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots..(12)$$

（下转第 244 页）

且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4\in W$ 使得 w_2Rw_4并且 w_3Rw_4。换言之，我们需要证明，下面的模式出现在什么地方



在模型中，总是有一个 w_4，它以这种方式延续了模式：



为了证明这一点，只要证明 wff 集合

（∧）$L^-(w_2)\cup L^-(w_3)$

是 S4.2 一致的。如果它是一致的，那么它将被包含在某个极大的 S4.2 一致的集合 w′中，并且在典范模型中。并且由于 $L^-(w_2)\subseteq w'$，$L^-(w_3)\subseteq w'$，得到 w_2Rw'和 w_3Rw'。所以这个 w′是 w_4。

那么，假设 ∧ 不是 S4.2 一致的。这意味着存在 wff $L\alpha_1$，…，$L\alpha_n$ 在 W_2 中和 $L\beta_1$，…，$L\beta_m$ 在 w_3 中，则有

$\vdash S4.2\neg(\alpha 1\cdot\ldots\cdot\alpha_n\cdot\beta_1\cdot\ldots\cdot\beta_m)$

通过【引据 3】和 L^-分配，简单来说，对于某个 $L\alpha\in w_2$和某个 $L\beta\in w_3$，

$\vdash S4.2\neg(\alpha\cdot\beta)$

通过 PC 可得

$\vdash S4.2\alpha\supset\neg\beta$

通过 DR3 可得，

（1）$\vdash_{S4.2}M\alpha\supset\neg L\beta$

根据【定理 3】，因为 $L\alpha\in w_2$，和 w_1Rw_2，我们有 $ML\alpha\in w_1$。因此根据 G 可得 $ML\alpha\in w_1$。但是 w_1Rw_3；所以 $M\alpha\in w_3$。因此根据（1）我们有 $\neg L\beta\in w_3$。但这是不可能的，因为根据假设 $L\beta\in w_3$。

因此，∧ 不一致的假设被证明是不成立的。因此，G 在收敛的模型中是有效的，S4.2 被证明是完全的。

综上所述，系统 S4.2 对于自反、传递和收敛（对于任何 w_1，w_2，$w_3\in W$，如果 w_1Rw_2并且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4\in W$ 使得 w_2Rw_4并且 w_3Rw_4）的模型来说，即可靠的又完全的。

参考文献：

[1]周北海.模态逻辑[M].北京：中国社会科学出版社，1996.

[2]张法清.关于正规模态命题逻辑系统的完全性证明[J].毕节学院学报，2009，27（04）：10-15.

[3]Chalki Aggeliki，Koutras Costas D，Zikos Yorgos. A quick guided tour to the modal logic S4.2[J]. Logic Journal of the IGPL，2018，26（4）.

[4]Chalki Aggeliki，Koutras Costas D.，Zikos Yorgos. A note on the complexity of S4.2[J]. Journal of Applied Non-Classical Logics，2021，31（2）.

[5]Hughes，G.E.& Creswel，MJ.A companion to modal logic[M].Methuen & Co Ltd，1984：1-38.

[6]Hughes，G.E.& Creswel，MJ.An Introduction modal logic[M].Fletcher & Son Ltd，1972：288-290.

作者简介：赵丹悦（1998-），女，河南许昌人，湘潭大学碧泉书院硕士研究生。研究方向：逻辑学。

（上接第 240 页）

$(2k+1，2k^2+2k)=(2k+1，2k^2+2k-k(2k+1))=(2k+1,k)$

$=(1,k)=1$

$(2k+1，2k^2+2k+1)=(2k+1，2k^2+2k+1-k(2k+1))$

$=(2k+1,k+1)=(k+1,k)=1$

所以必有 a，b，c $\in N^*$ 使得

$$\begin{cases}2k+1=a^{\frac{m}{2}}\\2k^2+2k=b^{\frac{n}{2}}\\2k^2+2k+1=c^{\frac{n}{2}}\end{cases}，(n,k\in N^*,n\ge 3)$$

$\therefore 1=(2k^2+2k+1)-(2k^2+2k)$

$=c^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}\ge 2^{\frac{n}{2}}-1^{\frac{n}{2}}\ge 2^{\frac{3}{2}}-1\approx 1.8$

显然不成立。即不存在这样的 a，b，c。

$\therefore y,z\notin Q$ ......（13）

所以当 $x\ne 2^m$ 时，原方程 $x^n+y^n=z^n$，$(n\ge 3)$ 无正整数解。

2）当 $x=2^m$ 时：

$(z-y)|2^m \quad\Rightarrow\quad z-y=2^a \quad (a\le m)$.......（14）

代入到 $x^n=z^n-y^n$ 中得；

$2^{mn}=c_n^1y^{n-1}2^a+c_n^2y^{n-1}(2^a)^2+\cdots+(2^a)^n$

等式两边同时除以 2^a 得：

$2^{mn-a}=c_n^1y^{n-1}+c_n^2y^{n-1}2^a+\cdots+(2^a)^{n-1}$

由此可见，$2^a|y^{n-1}$，又因为 y>x，即：

$y=2^b \quad (n>b>m)$......（15）

由（14），（15）可得：

$(2^m)^n+(2^b)^n=(2^a+2^b)^n$......（16）

$\because n>b>m\ge 1 \quad\Rightarrow\quad n\ge 3$

∴ 当 $n\ge 3$，（16）式两边同时除以 $(2^m)^n$ 得：

$1+2^{(b-m)n}=(2^{a-m}+2^{b-m})^n$

$$\begin{cases}\text{若 } a\ne m\text{，则左边是奇数，右边是偶数，等式不成立。}\\\text{若 } a=m\text{，则 }(1+2^{(b-m)n},1+2^{b-m})=1\\\text{左右互质，依然不成立。}\end{cases}$$ ......（17）

总结：综上（13），（17）可知

不定方程 $\boldsymbol{x^n+y^n=z^n}$，$\boldsymbol{(n\ge 3)}$，没有正整数解。

参考文献：

[1]《电子科技大学学报》1985~1986 年目录[J]. 电子科技大学学报，2001，30（2）：217-220，180.

[2]张英豪. 拟阵基的交图的性质[D]. 山东：山东大学，2014. DOI：10.7666/d.Y2596139.