模态逻辑 S4.2 的可靠性与完全性证明

赵丹悦

（湘潭大学碧泉书院　湖南省湘潭市　411105）

摘要：模型是证明正规命题模态系统的可靠性和完全性的一条重要途径，研究模态命题逻辑的形式系统的也离不开模型。模态逻辑 S4.2 是认知逻辑中的一个工具，是在 S4 和附加公理 G 所组合而成。我们通过证明系统 S4.2 的所有定理在自反、传递和收敛的模型上都有效，证明了系统 S4.2 的可靠性。正因为任何正规模态系统对于它的典范模型都是完全的，所以通过典范模型来证明系统 S4.2 是完全性的。

关键词：模态逻辑；S4.2 系统；可靠性；完全性

证明系统的可靠性和完全性，首先给出一个模态系统，然后引入一类模型。证明系统被模型类所刻画，也就是说一个公式是一个系统的定理当且仅当在一个模型类的每个模型上都有效。一个模型是一个三元组<W，R，V>，W 是一个非空集合，R 是一个定义在 W 中的二元关系，并且 V 是一种随后解释的真值指派。一个刻画证明有两个步骤，第一我们表明系统相对于模型类是可靠的，每一个定理在模型类中都有效；第二我们表明系统相对于模型类是完全的，每一个模型类有效的公式都是它的定理。

一、模态逻辑 S4.2 及其相关证明

1.1 模态逻辑 S4.2

模态逻辑 S4.2 是由 M. Dummet 和 E. J. Lemmon 在研究区间[S4，S5]模态逻辑中提出的。它是正规模态逻辑 S4 上增加公理

G　$M L\alpha \rightarrow L M\alpha$

得到的系统。该公式是由 P.T.Geach 提出，故以他的名字“G”所命名。注意公理 G 是公理模式 G*的一个特例。将 G*实例添加到 S4 产生无限数量的正规模态逻辑，包括 S4.2 本身，这也增加了对这种特定逻辑研究的兴趣。S4.2 的演绎基础是在 S4 的基础上加上公理 G 得到的，而 S4 是在 T 的演绎基础上增加公理 4 得到的，T 是在 K 的演绎基础上加上公理 T 得到的，推理能力也是逐渐增强，具体关系如下图所示：

$$K \longrightarrow T \longrightarrow S4 \longrightarrow S4.2$$

随着 60 年代关系（Kripke）语义的出现，证明了 S4.2 的特征在于自反、传递和收敛：

相关模型 R 是自反、传递和收敛的模型，在这个意义上，对于任何 w_1，w_2，$w_3 \in W$，如果 w_1Rw_2 并且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4 \in W$ 使得 w_2Rw_4 并且 w_3Rw_4。

若证明 S4.2 系统的可靠性和完全性，就需要证明 S4.2 系统相对于自反、传递和收敛的可靠性和完全性。

1.2 相关公理定理

1.2.1 S4.2 相关公理

T　$K+Lp \rightarrow p$

4　$Lp \rightarrow LLp$

G　$MLp \rightarrow LMp$

1.2.2 正规模态系统的规则

首先提到一个经典命题演算的版本，并称之为 PC。PC 语言将下列符号作为原始符号或未定义符号：

1.命题字母的可数无限集合，我们写作 p，q，r…带有或不带有数字下标；

2.四个符号~，∨，(，)。

这些符合的某些序列看成 PC 的合式公式（wff，后面出现的 wff 简称为公式）。一个模态系统被称为是正规的并且它有以下规定：

第一，S 包含所有的 PC 有效式作为定理

第二，S 包含如下公式：K　$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

第三，S 满足了许多原则，如果某些公式是 S 的定理，那么其他某些公式也是以某种方式与它们相关的。这些原则通常称为转换规则，任何正规模态系统都必须满足这三个规则。为了简化这些表述，引入了一些新的符号和术语。用 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \beta$ 来表示如果 α 是 S 的定理，那么 β 也是。将公式 α 的替换实例定义为任一公式，该公式是通过分别用任一公式 $\beta_1 \ldots \beta_n$ 替换 α 中出现的变量 $p_1 \ldots p_n$ 而获得的。

使用这样的符号和术语，我们将任一正规模态系统的转换规则表述如下：

US（统一替换）：如果 α 是定理，那么每个 α 的统一替换都是定理

MP（分离规则）：$\vdash \alpha$ 和 $\vdash \alpha \supset \beta \rightarrow \vdash \beta$

N（必然性规则）：$\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$

L-分配规律：

$L(p \wedge q) \equiv (Lp \wedge Lq)$

DR1：$\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash L\alpha \rightarrow L\beta$

DR3：$\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash M\alpha \rightarrow M\beta$

表示特定正规模态系统的一种常见方法是规定它除了 PC 重言式外，还包含其他公式的特定集合。这些公式必须包含 K，否则可以是我们选择的任何集合，因此被称为系统的公理；并且在这种情况下，它的定理是公式通过转换规则 US、MP 和 N，可以从定理和 PC 有效式中得出。

1.2.3 模型中赋值的规则

[V¬]对于任一公式 α 和任意 $w \in W$，如果 $V(\alpha, w)=0$，那么 $V(\neg\alpha, w)=1$；否则 $V(\neg\alpha, w)=0$。

[V∨]对于任一公式 α，β，任意 $w \in W$，如果 $V(\alpha, w)=1$ 或 $V(\beta, w)=1$，那么 $V(\alpha \vee \beta, w)=1$；否则 $V(\alpha \vee \beta, w)=0$。

[VL]对于任一公式 α 和任意 $w\in W$，如果对于每个 $w'\in W$ 都有 wRw'，且 V（α，w'）=1，那么 V（$L\alpha$，w）=1；否则 V（$L\alpha$，w）=0。

[VM]对于任一公式 α 和任意 $w\in W$，V（$M\alpha$，w）=1 当且有某个 $w'\in W$ 有 wRw'，并且 V（α，w'）=1；否则 V（$M\alpha$，w）=0。

[V→]对于任一公式 $\alpha\to\beta$，任意 $w\in W$，如果有 V（α，w）=1 且 V（β，w）=0，那么 V（$\alpha\to\beta$，w）=0；否则 V（$\alpha\to\beta$，w）=1

1.3 完全性和一致性

首先，进一步讨论一下完全性的概念。假设 S 是一个正规模态系统，有关于它的模型 C，我们想要证明的是 S 是完全的。我们在 C 模型类中谈论模型，也就是说 wff 是 C 有效的当且仅当它在每个 C 模型中是有效的。然后说 S 是完全的，因为它表示每一个 C 有效的 wff 都是 S 的一个定理，这就等于说，如果任何 wff 都不是一个 S 定理，那么它就不是 C 有效。更正式地说，使用符号‘$\vdash S\alpha$’表示 α 是 S 定理而‘$\dashv S\alpha$’表示‘α 不是 S 定理’，S 相对于一个模型类是完全的当且仅当

（1）对于每一个 wff α，如果 $\dashv_S\alpha$，那么则有某个 C 类模型〈W，R，V〉，其中有某个 $w\in W$，V（α，w）=0。

如果 α 的否定是 S 的定理（$\vdash_S\neg\alpha$），wff α 是 S 不一致的；如果它的否定不是 S 的定理（$\dashv_S\neg\alpha$），那么 wff α 是 S 一致的。这意味着是由系统中的定理来定义一致性，而不是以任何语义方式来定义的，例如根据模型或者是真值赋值。现在考虑一个系统和一类 C 模型类之间的关系：

（2）对于每一个 wff α，如果 α 是 S 一致的，则有某个 C 模型〈W，R，V〉，其中有某个 $w\in W$，V（α，w）=1。

如果（2）成立，那么（1）也成立。因为如果 $\dashv_S\alpha$，这意味着 $\neg\alpha$ 是 S 一致的；因此，如果（2）成立，则存在一个 C 模型，其中有某个 $w\in W$，V（$\neg\alpha$，w）=1。但是通过 V[¬]，则有 V（α，w）=0，所以（1）成立。

在至少一个世界中 α 为真的模型，有时称为 α 的验证模型。使用这个术语，我们可以表示（2）即每个与 S 一致的 wff 都有一个验证的 C 模型。把 S 一致性概念不仅应用到一个单个的 wff 上，而且应用到一个 wff 集上。如果 Λ 是一个有限 wff 集，可以简单的把它看成是一个单一的 wff，在这个单一的 wff 中，它是所有元素的一个合取。在这个意义上如果 $\Lambda=\{\alpha_1，…，\alpha_n\}$，我们说 Λ 是 S 一致的当且仅当 α_1，…，α_n 也是 S 一致的。用符号表示：$\dashv_S\neg(\alpha_1\wedge…\wedge\alpha_n)$

如果 Λ 是一个无穷集，没有它的所有元素的合取。在这种情况下，Λ 是 S 一致的且 Λ 的每个有限子集都是 S 一致的；或者换句话说，不存在 Λ 的有限子集 $\{\alpha_1，…，\alpha_n\}$，用符号表示：$\vdash_S\neg(\alpha\wedge…\wedge\alpha_n)$

这是对 S 一致性的一般定义，因为它清楚地涵盖了有限集的情况，甚至包含一个单一的公式情况。

典范模型方法直接证明的是（2）。但它实际上有一个更强大的结果，即如果 Λ 是任何 S 一致的 wff 集合，即使它有无限多个元素，那么存在一个 C 模型，其中 Λ 中的所有 wff 都在相同世界中为真，换句话说：

（3）如果 Λ 是任何 S 一致的 wff 集合，那么存在一个 C 模型〈W，R，V〉，其中有某个 $w\in W$，如果 $\alpha\in\Lambda$，那么 V（α，w）=1。

（2）是（3）只有一个元素的特殊情况。

1.4 极大一致集

一个 wff 的集合 Γ 被认为是极大的，当且仅当对于每个 α，要么是 $\alpha\in\Gamma$，要么是 $\neg\alpha\in\Gamma$。Γ 被认为是关于系统 S 的最大一致的，它既是极大的又是一致的。

下列是关于极大一致的原则，都适用 S 是任何正规模态系统的地方：

假设 Γ 是 wff 的关于 S 的任意极大一致的，那么

【引理 1】对于任一 wff α，在 $\{\alpha，\neg\alpha\}$ 中，有且只有一个元素在 Γ 中。

证明：因为 Γ 是极大一致集，根据极大一致集的定义，至少在 $\{\alpha，\neg\alpha\}$ 中有一个元素在 Γ 中。因为有且只有一个，即不存在两个都在 Γ 中的情况。假设 $\{\alpha，\neg\alpha\}$ 都在 Γ 中，即 $\{\alpha，\neg\alpha\}$ 是 Γ 的子集。根据 PC，有 $\vdash_S\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$，可得 $\alpha\wedge\neg\alpha$ 是 S 不一致的，所以 Γ 本身是不一致的，与前提矛盾，所以不存在两个都在 Γ 中的情况。因此，对于任意合式公式 α，在 $\{\alpha，\neg\alpha\}$ 中，恰好只有一个元素在 Γ 中。

以此类推下面的引理。

【引理 2】$\alpha\vee\beta\in\Gamma$ 当且仅当 $\alpha\in\Gamma$ 或 $\beta\in\Gamma$。

【引理 3】$\alpha\wedge\beta\in\Gamma$ 当且仅当 $\alpha\in\Gamma$，并且 $\beta\in\Gamma$。

【引理 4】如果 $\vdash_S\alpha$，那么 $\alpha\in\Gamma$。

【引理 5】如果 $\alpha\in\Gamma$，$\alpha\supset\beta\in\Gamma$，那么 $\beta\in\Gamma$。

【引理 6】如果 $\alpha\in\Gamma$，$\vdash_S\alpha\supset\beta$，那么 $\beta\in\Gamma$

【引理 7】假设 Λ 是一个 S 一致性的 wff 集。那么存在一个 S 极大一致的 wff 集，Γ，使得 $\Lambda\subseteq\Gamma$。

下面先介绍 L^-（Λ）的定义，用来辅助以下的证明：

假设 Λ 是模态逻辑中的任意 wff 集，用 L^-（Λ）来表示 Λ 中包含 L 算子的公式减去一个 L 算子组成的集合。用符号表示：$L^-(\Lambda)=\{\alpha：L\alpha\in\Lambda\}$

【引理 8】设 S 为任意正规模态系统，Λ 是一个包含 wff $\neg La$ 的 S 一致集，则有 $L^-(\Lambda)\cup\{\neg\alpha\}$ 是 S 一致的。

1.5 典范模型

假设 S 是任意一致的正规命题模态系统。S 的典范模型具有显著的性质，即在 S 的典范模型中 S 的每个非定理在每个世界中都是假的；或者，得出同样的结果，在 S 的典范模型中每一个 S 一致性的 wff 在每个世界是真的。

对于任何正规命题模态系统 S，它的典范模型〈W，R，V〉定义如下：

（1）关于 W，$W=\{w：w$ 是一个 S 的极大一致集$\}$。

（2）关于 R，对任意 $w_1，w_2\in W$，w_1Rw_2 当且仅当 $L^-(w_1)\subseteq w_2$。

（3）关于 V，对于任一变元 p，任意 $w\in W$，如果 $p\in w$，那么 V（p，w）=1；反之 V（p，w）=0。

如果 α 是 S 一致的 wff，那么【引理 7】保证了 α 是 wff w 的某个 S 极大一致的元素。对 W 的定义说明了这个 w 是典范模型中 W 的一个元素。基本定理将证明 α 在 w 中是真的。

【定理 1】假设〈W，R，V〉是正规命题模态系统 S 的典范模型，则对于任意 wff α 和任意 $w\in W$，如果 $\alpha\in w$，那么 V（α，w）=1；如果 $\alpha\notin w$，那么 V（α，w）=0

证明：首先运用归纳证明。

如果 α 是变元，则该定理适用于典范模型定义中（3）V 的定义。

如果 α 是 wff，有三种情况：①如果定理适用于 wff α，它也适用于 $\neg\alpha$；假设存在一个 wff $\neg\alpha$ 和一个任意 $w\in W$。根据[V$\neg$]则有 V（$\neg\alpha$，w）=1 当且仅当 V（α，w）=0。因为这个定理对 α 成立，则有 V（α，w）=0 当且仅当 $\alpha\notin w$。因此有 V（$\neg\alpha$，w）=1 当且仅当 $\alpha\notin w$。根据【引理 1】，$\alpha\notin w$ 当且仅当 $\neg\alpha\in w$，因此，最后可得 V（$\neg\alpha$，w）=1 当且仅当 $\neg\alpha\in w$。

②如果它适用于每一对 wff α 和 β，则适用于 $\alpha\vee\beta$；假设存在 $\alpha\vee\beta$。根据[V$\vee$]则有 V（$\alpha\vee\beta$，w）=1，当且仅当或者 V（α，w）=1 或者 V（β，w）=1。由于定理适用于 α 和 β，因此可以得到 V（$\alpha\vee\beta$，w）=1，当且仅当或者 $\alpha\in w$ 或者 $\beta\in w$。因此，根据【引理 2】可得 V（$\alpha\vee\beta$，w）=1 当且仅当 $\alpha\vee\beta\in w$。

③如果它适用于 wff α，它也适用于 $L\alpha$。因为 $\neg$，V 和 L 是我们唯一的初始算子，这将表明该定理适用每一个 wff。（a）假设 $L\alpha\in w$。那么根据典范模型中（2）R 的定义，$\alpha\in w'$对于每个 w'都有 wRw'。因为这个定理对 α 成立，所以有对于每一个 w'都有 V（α，w'）=1。因此根据[VL]可得 V（$L\alpha$，w）=1。（b）假设 $L\alpha\notin w$，那么根据【引理 1】，$\neg L\alpha\in w$。根据【引理 8】，L^-（w）$\cup\{\neg\alpha\}$是 S 一致的。所以根据【引理 7】和 W 的定义，存在 $w'\in W$ 使 L^-（w）$\cup\{\neg\alpha\}\subseteq w'$，因此可得 L^-（w）$\subseteq w'$，$\neg\alpha\in w'$。现在 L^-（w）$\subseteq w'$通过 R 定义可得 wRw'。因为这个定理适用于 α，根据前面的①，这个定理也适用于 $\neg\alpha$。由 $\neg\alpha\in w'$可得 V（$\neg\alpha$，w'）=1，因此 V（α，w'）$\neq$1。因此根据[VL]可得 V（$L\alpha$，w'）$\neq$1。

【定理 2】任意 wff α 都是 S 典范模型中有效的当且仅当 $\vdash_S\alpha$。

证明：令〈W，R，V〉为 S 的典范模型，假设 $\vdash_S\alpha$，那么根据【引理 4】可得，α 在每一个 wff 集的 S 极大一致的中，因此每一个 $w\in W$，$\alpha\in w$，根据【定理 1】可得，对于每一个 $w\in W$ 有 V（α，w）=1，也就是说，α 在〈W，R，V〉上有效。假设$\dashv_S\alpha$，那么 $\neg\alpha$ 是 S 一致的。因此存在 $w\in W$，$\neg\alpha\in W$，所以 $\alpha\notin W$。再根据【定理 1】，存在 $w\in W$，V（α，w）$\neq$1。也就是说 α 在〈W，R，V〉中是不有效的。

如果 Λ 是任意 wff 集合，即可记为‘M^+（Λ）’来表示在 Λ 中的每一个 wff 前加 M 得到的 wff 集合。也可写成 M^+（Λ）=$\{M\alpha: \alpha\in\Lambda\}$

【定理 3】假设 Γ 和 Γ'是相对于正规模态系统的 wff 的极大一致集，那么 L^-（Γ）$\subseteq\Gamma'$当且仅当 M^+（Γ'）$\subseteq\Gamma$。

证明：①假设 L-（Γ）$\subseteq\Gamma'$但是 M+（Γ'）$\nsubseteq\Gamma$。那么根据 M+（Γ'）$\nsubseteq\Gamma$ 则有，存在 wff $\alpha\in\Gamma'$，就有 $M\alpha\notin\Gamma$。因此 $\neg M\alpha\notin\Gamma$，$L\neg\alpha\in\Gamma$。因此根据 L^-（Γ）$\subseteq\Gamma'$可得 $\neg\alpha\in\Gamma'$，然后 $\alpha\notin\Gamma'$。与假设存在矛盾。②假设 M^+（Γ'）$\subseteq\Gamma$ 但是 L^-（Γ）$\nsubseteq\Gamma'$。根据 L^-（Γ）$\nsubseteq\Gamma'$则有，存在 wff $L\alpha\in\Gamma$ 使 $\alpha\notin\Gamma'$，进而 $\neg\alpha\in\Gamma'$。因此根据 M^+（Γ'）$\subseteq\Gamma$，$M\neg\alpha\in\Gamma$；又根据 $\neg L\alpha\in\Gamma$；所以 $L\alpha\notin\Gamma$；与假设存在矛盾。

二、S4.2 系统的可靠性证明

首先要证明 S4.2 系统的可靠性，就要证明 S4.2 的所有定理在自反、传递和收敛的模型上都有效。在模型中定义有效性，是说一个公式 α 在模型<W，R，V>有效当且仅当 V（α，w）=1 对于每个 $w\in W$。实际上，有效性是存在于每一个世界，每一种特定类型的模型中为真。主要分为以下两点。

2.1 定理 G 在每个自反、传递和收敛的模型上都有效

证明定理 G 在系统 S4.2 中有效，就是证明在自反、传递和收敛的模型中有效，即 $ML\alpha\to LM\alpha$ 在 $w\in W$ 中为真。

假设存在 wffα，对于 $w\in W$ 有 V（α，w）=1。

根据自反性有 w_1Rw_1，所以 V（$M\alpha$，w_1）=1。

根据传递性，所以对于任意于任意 w_1，w_2，$w_3\in W$，如果 w_1Rw_2、w_2Rw_3，那么 w_1Rw_3，所以 V（$M\alpha$，w_2）=1，V（$M\alpha$，w_3）=1。

根据收敛性，所以对于任何 w_1，w_2，$w_3\in W$，如果 w_1Rw_2 并且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4\in W$ 使得 w_2Rw_4 并且 w_3Rw_4，所以 V（$M\alpha$，w_4）=1。

即 $M\alpha$ 在 w 可及的所有可能世界都为真，因此可知 V（$LM\alpha$，w）=1，根据[V$\to$]赋值定义，V（$ML\alpha\to LM\alpha$，w）=1

由此可以得出对于任意 $w\in W$ 有 V（$ML\alpha\to LM\alpha$，w）=1，也就是说，G 在 S4.2 中是有效的。

2.2 以下三大规则在该模型上保有效

US（统一替换）：如果 α 是定理，那么每个 α 的统一替换都是定理。

如果 α 在每个自反、传递和收敛的模型上都有效，即在每个的可能世界 w 都为真，V（α，w）=1。通过任一公式对 α 中的变元进行统一替换得到 β，因为任一公式在 w 中有相同的真值，所以有 V（β，w）=1。因此，US 规则保有效。以此类推以下规则。

MP（分离规则）：$\vdash\alpha$ 和 $\vdash\alpha\supset\beta\to\vdash\beta$

N（必然性规则）：$\vdash\alpha\to\vdash L\alpha$

三、S4.2 系统的完全性证明

证明 S4.2 系统的完全性就是证明在相关类中的所有模型中有效的所有公式都是该系统的定理，而通过【定理 2】可以看出，在典范模型中有效的公式，一定是该典范模型的定理。下面我们用典范模型来证明完全性，即证明 S4.2 对所有自反、传递和收敛的模型类是完全的。

3.1 在 S4.2 的典范模型中 R 是自反的

根据自反的定义可知，对于每个 $w\in W$，有 wRw。根据典范模型中 R 的定义，得到 L^-（w）$\subseteq w$。

根据 L^-（Λ）的定义，对于任何 wff α，如果 $L\alpha$ 在 w 中，那么 α 也在 w 中。

假设 $L\alpha\in w$，又因为系统 S4.2 包含系统 T，所以有 $\vdash_T L\alpha\supset\alpha$。

再根据【引理 6】可得，$\alpha\in w$。

因此，在 S4.2 的典范模型中 R 是自反的。

3.2 在 S4.2 的典范模型中 R 是传递的

根据传递的定义可知，对于任意 w_1，w_2，$w_3\in W$，如果 w_1Rw_2、w_2Rw_3，那么 w_1Rw_3。根据典范模型中 R 的定义，如果 L^-（w_1）$\subseteq w_2$、L^-（w_2）$\subseteq w_3$，那么 L^-（w_1）$\subseteq w_3$。

根据 L^-（Λ）的定义，L^-（w_1）$\subseteq w_3$ 就是如果 $L\alpha\in w_1$，那么 $\alpha\in w_3$。

那么假设 $L\alpha\in w_1$，因为系统 S4.2 包含系统 S4，所以有 $\vdash_{S4}L\alpha\supset LL\alpha$。

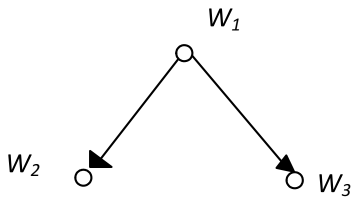
再根据【引理 6】，根据 $\vdash_{S4}L\alpha\supset LL\alpha$，可得 $LL\alpha\in w_1$。因此根据 L^-（w_1）$\subseteq w_2$，$L\alpha\in w_2$；L^-（w_2）$\subseteq w_3$，$\alpha\in w_3$。

因此，在 S4.2 的典范模型中 R 是传递的。

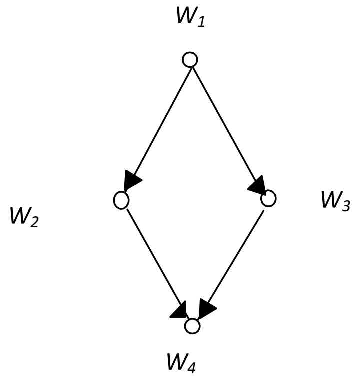
3.3 在 S4.2 的典范模型中 R 是收敛的

根据收敛的定义可知，对于任何 w_1，w_2，$w_3\in W$，如果 w_1Rw_2 并

且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4 \in W$ 使得 w_2Rw_4并且 w_3Rw_4。换言之，我们需要证明，下面的模式出现在什么地方



在模型中，总是有一个 w_4，它以这种方式延续了模式：



为了证明这一点，只要证明 wff 集合

（Λ）L^-（w_2）$\cup L^-$（w_3）

是 S4.2 一致的。如果它是一致的，那么它将被包含在某个极大的 S4.2 一致的集合 w'中，并且在典范模型中。并且由于 L^-（w_2）$\subseteq w'$，L^-（w_3）$\subseteq w'$，得到 w_2Rw'和 w_3Rw'。所以这个 w'是 w_4。

那么，假设 Λ 不是 S4.2 一致的。这意味着存在 wff $L\alpha_1$，…，$L\alpha_n$ 在 W_2中和 $L\beta_1$，…，$L\beta_m$在 w_3中，则有

$\vdash$S4.2$\neg$（$\alpha 1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_m$）

通过【引据 3】和 L^-分配，简单来说，对于某个 $L\alpha \in w_2$和某个 $L\beta \in w_3$，

$\vdash$S4.2$\neg$（$\alpha \cdot \beta$）

通过 PC 可得

$\vdash$S4.2$\alpha \supset \neg\beta$

通过 DR3 可得，

（1）$\vdash_{S4.2} M\alpha \supset \neg L\beta$

根据【定理 3】，因为 $L\alpha \in w_2$，和 w_1Rw_2，我们有 $ML\alpha \in w_1$。因此根据 G 可得 $ML\alpha \in w_1$。但是 w_1Rw_3；所以 $M\alpha \in w_3$。因此根据（1）我们有 $\neg L\beta \in w_3$。但这是不可能的，因为根据假设 $L\beta \in w_3$。

因此，Λ 不一致的假设被证明是不成立的。因此，G 在收敛的模型中是有效的，S4.2 被证明是完全的。

综上所述，系统 S4.2 对于自反、传递和收敛（对于任何 w_1，w_2，$w_3 \in W$，如果 w_1Rw_2并且 w_1Rw_3，那么则存在一个 $w_4 \in W$ 使得 w_2Rw_4并且 w_3Rw_4）的模型来说，即可靠的又完全的。

参考文献：

[1]周北海.模态逻辑[M].北京：中国社会科学出版社，1996.

[2]张法清.关于正规模态命题逻辑系统的完全性证明[J].毕节学院学报，2009，27（04）：10-15.

[3]Chalki Aggeliki，Koutras Costas D，Zikos Yorgos. A quick guided tour to the modal logic S4.2[J]. Logic Journal of the IGPL，2018，26（4）.

[4]Chalki Aggeliki，Koutras Costas D.，Zikos Yorgos. A note on the complexity of S4.2[J]. Journal of Applied Non-Classical Logics，2021，31（2）.

[5]Hughes，G.E.& Creswel，MJ.A companion to modal logic[M].Methuen & Co Ltd，1984：1-38.

[6]Hughes，G.E.& Creswel，MJ.An Introduction modal logic[M].Fletcher & Son Ltd，1972：288-290.

作者简介：赵丹悦（1998-），女，河南许昌人，湘潭大学碧泉书院硕士研究生。研究方向：逻辑学。

（上接第 240 页）

$(2k+1\,,\,2k^2+2k)=\left(2k+1\,,\,2k^2+2k-k(2k+1)\right)=(2k+1,k)$

$=(1,k)=1$

$(2k+1\,,\quad 2k^2+2k+1)=\left(2k+1\,,\,2k^2+2k+1-k(2k+1)\right)$

$=(2k+1,k+1)\ =(k+1\,,k)=1$

所以必有 a，b，c $\in N^*$ 使得

$$\begin{cases} 2k+1=a^{\frac{m}{2}} \\ 2k^2+2k=b^{\frac{n}{2}} \qquad ,\ (n,k\in N^*,n\geq 3) \\ 2k^2+2k+1=c^{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

$\therefore 1=(2k^2+2k+1)-(\,2k^2+2k)$

$=c^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}\geq 2^{\frac{n}{2}}-1^{\frac{n}{2}}\geq 2^{\frac{3}{2}}-1\approx 1.8$

显然不成立。即不存在这样的 a，b，c。

$\therefore y,z\notin Q$ ……………………………（13）

所以当 $x\neq 2^m$时，原方程 $x^n+y^n=z^n$，　$(n\geq 3)$ 无正整数解。

2）当$x=2^m$时：

$(z-y)|2^m \quad \Rightarrow \quad z-y=2^a \quad (a\leq m)$…….（14）

代入到 $x^n=z^n-y^n$ 中得；

$2^{mn}=c_n^1y^{n-1}2^a+c_n^2y^{n-1}(2^a)^2+\cdots+(2^a)^n$

等式两边同时除以 2^a 得：

$2^{mn-a}=c_n^1y^{n-1}+c_n^2y^{n-1}2^a+\cdots+(2^a)^{n-1}$

由此可见，$2^a|y^{n-1}$，又因为 y>x ，即：

$y=2^b \quad (n>b>m)$……………………………………………（15）

由（14)，(15）可得：

$(2^m)^n+(2^b)^n=(2^a+2^b)^n$…………………………（16）

$\because n>b>m\geq 1 \quad \Rightarrow \quad n\geq 3$

$\therefore$ 当 $n\geq 3$，（16）式两边同时除以 $(2^m)^n$ 得：

$1+2^{(b-m)n}=(2^{a-m}+2^{b-m})^n$

$$\begin{cases} \text{若 } a\neq m\text{ ，则左边是奇数，右边是偶数，等式不成立。} \\ \text{若 } a=m\text{ ，则 } \left(1+2^{(b-m)n},1+2^{b-m}\right)=1 \\ \text{左右互质，依然不成立。} \quad \text{…………………（17）} \end{cases}$$

总结：综上（13)，(17）可知

不定方程 $\boldsymbol{x^n+y^n=z^n}$，　$\boldsymbol{(n\geq 3)}$，没有正整数解。

参考文献：

[1]《电子科技大学学报》1985~1986 年目录[J]. 电子科技大学学报，2001，30（2）：217-220，180.

[2]张英豪. 拟阵基的交图的性质[D]. 山东：山东大学，2014. DOI：10.7666/d.Y2596139.