初中数学函数综合题的错解剖析及教学策略初探

王春芳

（东西湖区吴家山第二中学　湖北省武汉市　430040）

摘要：初中数学函数综合题，学生普遍感到困难，解题过程中常出现不同程度的错误。作者认为老师勤探究，多钻研，并在平时的教学中，指导学生常反思，多总结，可让学生智慧解题，高效学习，培养学生良好的数学观念和创新思维。对学生解决数学综合题的常见错解剖析，原因分析，探究平时教学中的策略：注重数学思想；重视数学阅读；掌握数学方法，关注通性通法。能够不断提高学生综合题解决能力。

关键词：综合；错解剖析；核心素养；教学策略；思想；阅读；方法

The Missolution Analysis and Teaching Strategy of the Comprehensive Math Function Problem in Junior Middle School

Wang Chunfang

（Wujiashan No. 2 Middle School in Dongxihu District Wuhan，Hubei Province 430040）

Abstract：Junior high school mathematics function comprehensive problems，students generally feel difficult，the process of solving problems often appear different degrees of mistakes. The author believes that teachers explore and study more，and in the usual teaching，guide students to reflect often，summarize more，can let students solve problems intelligently，study efficiently，and cultivate students' good mathematical ideas and innovative thinking. Analyze the common missolutions of students to solve comprehensive mathematics problems,analyze the causes,and explore the strategies in ordinary teaching：pay attention to mathematical thought；pay attention to mathematics reading；master mathematical methods，pay attention to the general method. Can continuously improve students' ability to solve comprehensive problems.

Key words：Comprehensive misanalysis，core literacy，teaching strategy thought reading method

初中数学函数综合题是初中数学中覆盖面最广、综合性最强的题型。常常以数与形、代数计算与几何证明、相似三角形和四边形的判定与性质、画图分析与列方程求解、勾股定理与函数、圆和三角形相似比相结合；同时考查初中数学中最重要的数学思想方法。此类题融入了动态几何的变和不变，对给定的图形施行平移、翻折和旋转等位置变化，然后在新的图形中分析有关图形之间的关系。其特点是：注重考查学生的实验、猜想、证明的探索能力。此类题解法灵活多变，综合考查学生分析问题和解决问题的能力，有一定难度。但上手比较容易，以几个小问题出现，相当于几个台阶，这种恰当的铺垫给了学生生较宽的入口，有利于学生正常水平的发挥。而且通过层层设问，拾级而上，逐步深入，也能够使一部分优秀学生数学水平得到体现。

学生解决这类函数综合题，普遍感到困难，甚至望题生畏。解题过程中常出现不同程度的错误，有时还无从下手，不能动笔。我认为老师勤探究，多钻研，并在平时的教学中，指导学生常反思，多总结，让学生亲身体验创造性思维活动中所经历和应用到的数学思想和方法，总结解数学综合题中所隐含的重要的数学思想和方法，结合实际问题加以领会与掌握，智慧解题，可以提高把数学知识与技能转化为分析问题解决问题的能力，高效学习，能培养学生良好的数学观念和创新思维。

新课程强调在“做”中学，在学习数学的过程中，学生的主体性、探索性、建构性的学习特征，得到充分的关注与发掘。综合题在知识网络的交汇变化点上设计，体现学科知识的融会贯通、分析和解决问题能力的梯次递进，重视数学思想和方法的考查，突出数学应用、探究意识与创造精神的检测。综合题的教学有利于教学中体现问题解决的思想精髓，强调创造能力和应用意识，鼓励学生探索、猜想和发现。研究初中数学综合题的教学策略，对更好地实现新课程所倡导的新理念具有重要的现实意义。

下面，结合初中数学的三个典型函数综合题，根据我平时教学中的一些尝试和体会，对学生解决数学综合题的常见错解剖析，探究老师在平时教学中的策略，不断提高学生综合题的解决能力。

一、三个函数综合题：

问题 1 .如图，直线 AB 分别交 X 轴、Y 轴于 B（b，0），

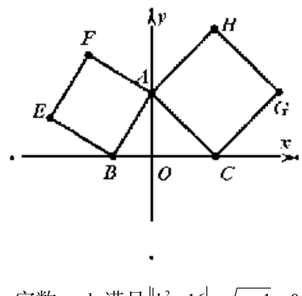
A（0，a）两点，C（c，0）为 X 轴正半轴上一点，b、c 是方程 $x^2-3x-16=0$ 的两个

实数根，分别以 AB、AC 为边作正方形 ABEF 和正方形 ACGH。

（1）若 a=4，试判断△ABC 的形状，并说明理由。

（2）连接 FH，交 Y 轴于点 P，求证：P 点为 FH 的中点。

（3）连接 EG，取其中点 Q，判断 PQ 与 FH 的位置关系，并证明。



问题 2 .已知：实数 a，b 满足 $\left|b^2-16\right|+\sqrt{a-1}=0$，双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 经

过点 $p(|b|,a)$.

（1）求 k 的值。

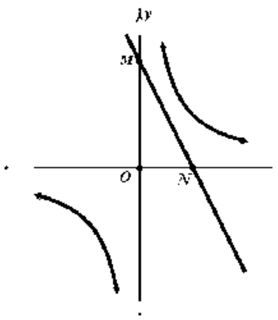
（2）如图 1，点 A、B 同时从点 O 出发，分别在 X 轴正半轴，Y 轴正半轴上以 2 个单位/秒，1 个单位/秒的速度运动。设运动时间为 t 秒，连接 PA、PB.是否存在 t 值，使 $S_{\triangle PBA}=2$，若存在，求 t 的值，若不存在，请说明理由。

（3）如图 2，点 M（0，a），直线 OM 绕点 M 逆时针方向旋转得直线 MN。

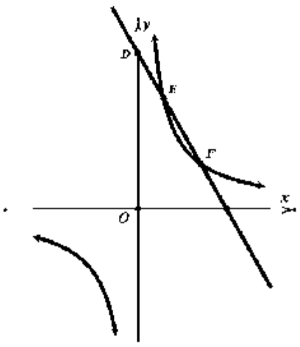
1）当直线 MN 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 只有一个公共点时，求直线 MN 的解析式。

2）直线 MN 交 X 轴于 C，当∠OMC＝60° 时，向右平移直线 MC 交双曲线 $y=\frac{k}{x}$

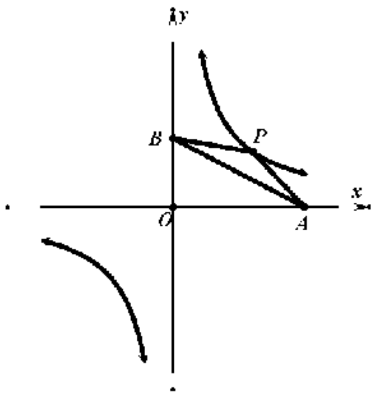
于 E，交 Y 轴正半轴于 D（如图 3），求 DE·DF 的值。



（图 1）



（图 2）



（图 3）

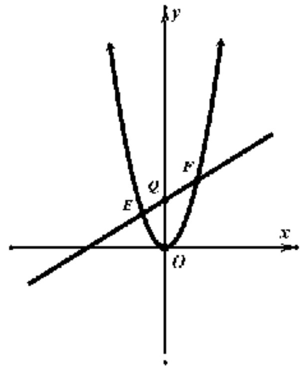
问题 3.如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 A（－3，0），B（−1，0）两点。

（1）求抛物线的解析式。

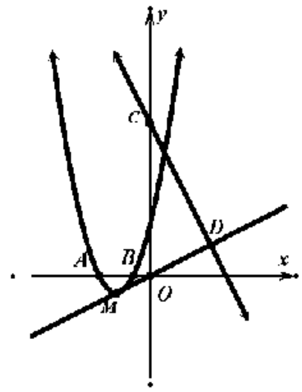
（2）设抛物线的项点为 M，直线 y=−2x+9 与 y 轴交于点 C，与直线 OM 交于点 D，现将抛物线平移，保持顶点在直线 OD 上，若平移的抛物线与射线 CD（含

端点 C）只有一个公共点，求它的顶点横坐标的值或取值范围。

（3）如图 2，将抛物线平移，当顶点至原点时，过 Q（0，3）作不平行于 x 轴的直线交抛物线于 E，F 两点，问在 y 轴的负半轴上是否存在点 P，使△PEF 的内心在 y 轴上，若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



（图 1）



（图 2）

二、学生解题过程中存在的典型错误及问题。

1.问题 1 的第一问，学生证明时，只考虑到利用勾股定理的逆定理，通过解方程求线段 OA、OB 的长，计算量较大，而且易出错。问题 3 的第二问，不能由抛物线的顶点的坐标特点这一隐含条件，得到平移后抛物线项点坐标的关系。学生通常情况下，不能综合运用题目条件，灵活选择解题方法。

2.问题 1 的第二问，学生解题时仍然将第一问中的结论∠BAC＝90° 作为条件用。第三问，解题时又没有用到第二问的结论：P 为 FH 的中点。学生在解决多问的题目时，常常是孤立思考，单独解题，忽视问题之间，条件与结论之间的联系。

3.问题 2 的第二问，化动为静，利用 $S_{\triangle PAB}=2$，通过数学建模构造方程求 t 的值,学生只考虑题目中的图形,直线 AB 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 没有交点的情况，忽视了直线与双曲线相交的情形。问题 2 第三问的第一个问题，当直线 MN 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 只有一个公共点时，求直线 MN 的解析式，绝大部分学生漏掉了直线 MN 平行于 X 轴这种特殊情况。问题 3 的第二问，多数学生没有考虑当抛物线经过点 C 时，平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点。学生经常出现思考不严密，答题不全面的的情况。

4.问题 1 的第三问，正方形和中点这两个条件，学生不知道怎么用。问题 2 的第三问，不会用∠OMC＝60° 有什么用，不知道 DE·DF 怎么出现。问题 3 的第三问，△PEF 的内心在 y 轴上，说明了什么，点 E、F 是变化的，它的坐标具体求不出来，所以求点 P 的坐标，不知道怎么求。学生很多时候是拿着题不知所措，一经提醒就恍然大悟。

三、错解剖析及原因分析：

1.没有将数与形结合起来，不能将点的坐标与线段的长度联系起来。所以问题 1 的第一问，学生很少利用根与系数的关系，通过三角形相似来证明。问题 3 的第二问，不能找到顶点坐标之间的关系，没有把平移后的抛物线的解析式设成顶点式，计算量就会很大。考虑问题不全面，常出现漏解，尤其是某些特殊情形，这都是由于没有掌握常用的数学思想。

2.没有真正读懂题目，不能理解题意，弄清题目的每一问之间有什么关联。解题时，往往将条件与结论张冠李戴。数学的综合题，有时前面问题的结论、方法或相关思想，对解决后面问题会有帮助。学生对于这一点，解题时出错很多。这都是由于平时不重视阅读。

3.碰到图形复杂的题目，不会全面理解题意，清楚地理解全部条件和结论，发现和挖掘比较隐蔽的条件，探求条件和结论的内在联系。这都是由于没有掌握常规的解题方法，不会触类旁通。

4.学生能力还有待提高，这个需要老师平时注意学生核心素养的培养。学生在实际情境中发现和提出有意义的数学问题，逐步养成从数学角度观察现实世界；形成重论据，有条件，合乎逻辑的思维品质；有意识地运用数学语言表达现实生活与其他学科中事物的性质，关系和规律并解释表达的合理性。

四、教学策略：

1.注重数学思想。数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人们的意识之中，经过思维活动而产生的结果，是对数学事实与理论经过概括后产生的本质认识。基本数学思想则是体现或应该体现于基础数学中的具有奠基性、总结性和最广泛的数学思想，它们含有传统数学思想的精华和现代数学思想的基本特征，并且是随历史发展的。通过数学思想的培养，数学的能力才会有一个大幅度的提高。学生掌握数学思想，就是掌握数学的精髓。上面问题二的第 2、3 问和问题三的第三问，都要用到：分类的数学思想，转化的数学思想，数形结合的数学思想，整体的数学思想等。当直线 MN 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 有两个公共点时，由 $S_{\triangle PAB}=2$，求 t 的值；直线 MN 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 只有一个公共点时；平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点等，首先考虑特殊情形，再思考一般情形，这样就不会丢三掉四，出现漏解。数与形结合，将复杂问题转化，简化，能够剖析综合题的结构，弄清它们的相互关系，学会把综合题“分解”为若干基本题。

作为教师，我们首先弄清楚教材中所反映的数学思想方法以及它与数学相关知识之间的联系，并适时作出归纳和概括，在具体的授课活动中，以适当的方式将数学思想方法加以揭示，并使之表层化，使学生达到真正意义上的领会和掌握，增强学生对数学思想方法的应用意识。

2.重视数学阅读。综合题，横跨两个或两以上知识块，具有一定难度，需要利用包含两个或两个以上知识块中的若干知识点，经过适当的计算和推理，才能获得解决问题的方法。数学语言用形式化的符号，反映现实世界中各种问题和各种现象。只有掌握一定阅读数学语言的能力，才能通过联想，建立新旧知识的联系，对新旧知识重新进行整合、同化形成自己的知识系统。

学生数学阅读理解能力欠缺，抓不住一些比较关键的词语，造成理解上的偏差，直接影响了他们学习数学的兴趣和解题的能力。学生解决综合题时，常出现条件瞎用或不用。题目的总条件，每一问的条件和结论间的关系，学生没有读懂题就开始做，出现错误的可能性就很大。所以，培养学生的数学阅读能力，让学生捕捉数学问题的条件和结论，使其养成“边阅读，边思考”的阅读习惯，有利于其数学能力的发展，进而促进其终身学习能力的提高。因此，教学工作中我注重学生数学阅读能力的培养，“授人以渔”。指导学生学生读题后，把他们认为关键的词语找出来，根据题目提供的信息，在理解的基础上，进行语义转换和语句分析，可以在一定程度上减少由于读题不认真而产生的错误，提高学生的读题、审题能力，进而提高解题能力。

3.掌握数学方法。解答数学题的基本思路，是通过由因导果或执果溯因，确立题中条件与结论或条件与问题在逻辑上的必然联系，实现由已知向未知的转化。解决综合题，需要认真审题，对条件全面分析转译和改造；联想与转化，化复杂为单一，折综合为基本；多反思形成能力。我认为解决综合题时，一定要指导学生抓住一些基本的图形特征，掌握常规的解题方法。问题一的第 2 问，证明 P 为 FH 的中点，即 FP=PH。常规方法：证三角形全等得到，而全等至少要有一条边相等，想到正方形的性质，而且直角三角形全等为最基础，所以自然想到作 y 轴的垂线。第 3 问，在第 2 问的前提下，出现中点，联想到垂直平分线，因此分别过点 E，G 作 FH 的垂线 EM，GN，证明 EM＝GN 即可，又转化为证明三角形全等。本题涉及的线条和图形比较多，可分解抽象出自己所需要的图形。问题 2 的第 3 问，直线 MN 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 只有一个公共点，首先考虑特殊情形，再由直线与双曲线解析式组成方程组，得到一元二次方程，利用方程判别式 $b^2-4ac=0$，求出 a 的值。求 DE·DF 的值，由∠OMC＝60° 和平移，得出 DE，DF 与 E，F 两点横坐标间的关系，再由直线与双曲线解析式联立得到方程，利用根与系数的关系求得 DE·DF 的值。问题 3 的第 3 问，抓住△PEF 的内心在 y 轴上，求 P 点坐标，可通过直线与 y 轴相交得到，所以利用 F 点和 E 点的对称点求直线。本题的难点是整体思想的运用。

4.加强学生核心素养的培养。学会用数学的眼光观察现实世界，用数学的思维现实世界，用数学的语言表达现实世界。

美国心理学家布鲁纳指出：掌握基本数学思想方法，能使数学更易于理解和更易于记忆；领会基本数学思想方法，是通向迁移大道的“光明之路”。在数学教学过程中，在分析和解决数学问题的过程中，老师有意识地加强数学思想方法的训练，使学生在运用中加深对数学思想方法的理解，更好地掌握其精神实质。我经常结合数学课堂教学，针对数学思维活动过程中展示出来的数学思想方法，不失时机地进行提问与讨论、启发引导学生领悟出思想方法，进行总结提炼；有意识地组织学生进行必要的解题训练，结合分析问题解决问题的思维过程提炼出数学思想方法等。平时教学中，教师与学生，学生与学生间进行多向交流，对所学的知识进行归纳小结，对所学过的内容进行比较和系统化，形成知识网络，便于日后进行信息的检索和提取。

综合题由单纯的知识叠加型，转化为知识、方法和能力综合型。老师在平时的教学中，应注意数学思想方法的运用；思路的选择和运算方法的选择。引导学生读懂题意，弄清题目涉及的概念，熟悉它涉及的常用定理、公式、技巧等；探讨可能的解题途径；深入研究例题的类型和解法，比较例题和所要解决的题目的异同，以达到触类旁通的目的。学生才能智慧解题，高效学习，才会挖掘综合题目包含或隐含的各种信息，灵活地运用所学的数学知识、思想和方法，进行独立的思考、探索和研究，找出解决问题的思路和方法，创造性地解决问题。

参考文献：

[1]李佳贤. 浅谈初中数学课堂教学中教师提问的有效性策略[J]. 百科论坛电子杂志，2020（13）：486-487.