

测量平差中几种极条件方程的列立规律分析

李梦瑶

(山东科技大学资源学院 山东 泰安, 271000)

摘要: 给出了几种基本几何图形的极条件方程的列立方法。从大地四边形、中点四边形和扇形三种几何模型出发, 根据图形的规律, 给出了极条件方程的列立的简单方法。实践证明, 该方法易于掌握, 容易实现, 具有一定的应用价值。

关键词: 大地四边形; 中点多边形; 扇形; 极条件方程

0 引言

在误差理论与测量平差基础这门课中, 三角网是一类重要的几何图形, 它通常是由单三角形、大地四边形、中点多边形和扇形等几种基本几何图形构成。对于三角网条件方程的列立是一个非常重要的内容。条件方程包括图形条件、圆周条件、极条件等, 其中, 极条件也称为边长条件, 是一种非线性条件方程, 它含有较多的三角函数, 同时以分数的形式出现, 其结构相对复杂, 所以关于它的列立问题一直困扰着很多初学者以及数学基础差的测量人员。本文中, 从测角三角网平差问题出发, 以大地四边形、中点多边形以及扇形等几种基本几何图形为例, 分析它们的极条件方程的结构, 并给出简单的列立极条件方程的方法。

1 大地四边形

如图 1 所示, 为一个测角的大地四边形, 其图形的特点是: 四个点 A、B、C、D 均匀分布, 彼此首尾相连形成四边形, 然后成对角线方向的点 A、C 相连, B、D 相连。

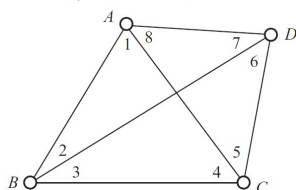


图 1

1.1 大地四边形的极条件方程的列立

由图 1, 可列出 4 个条件方程, 即 3 个图形条件, 1 个极条件;

需要注意, 列立极条件时, 可以选择任意一点为极; 但是, 选哪个点为极, 该点所在的观测角在列极条件方程时用不到。例如, 若以 A 点为极, 则极条件为

$$\frac{\sin(\hat{L}_7 + \hat{L}_6) \sin \hat{L}_4 \sin \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_7 \sin \hat{L}_5 \sin(\hat{L}_3 + \hat{L}_2)} - 1 = 0$$

1.2 大地四边形的极条件方程的列立规律

(1) 如图 1 所示, 大地四边形中点 A、D、C、B 以顺时针方向来看;

(2) 由于以 A 点为极, 所以 $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_8$ 用不到;

(3) 公式从 D 点处的角度开始, 在分子上, 在 D 点处取两个角度之和 $\hat{L}_7 + \hat{L}_6$ 的正弦, 然后越过连线依次取 C 点处的一个角度 $\hat{L}_4$ 、B 点处的一个角度 $\hat{L}_2$; 在分母上, 不越过连线, 依次取 D 点处的一个角度 $\hat{L}_7$ 、C 点处的一个角度 $\hat{L}_5$, 最后一个是在 B 点处取两个角度之和 $\hat{L}_3 + \hat{L}_2$ 。

2 中点多边形

如图 2 所示, 为一测角的中点四边形, 其图形的特点是: 四个点 A、B、C、D 分布在外围, 彼此首尾相连形成四边形, 中间有一个点 E, E 点与外围的四个点彼此相连。

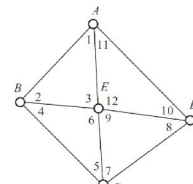


图 2

2.1 中点多边形的极条件方程的列立

由图 2, 可列出 6 个条件方程, 即 4 个图形条件, 1 个圆周条件, 1 个极条件 (以 E 点为极); 若以中点为极, 则该点处的角度观测值用不到。例如, 以 E 点为极, 则极条件为

$$\frac{\sin \hat{L}_{11} \sin \hat{L}_8 \sin \hat{L}_5 \sin \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_1 \sin \hat{L}_{10} \sin \hat{L}_7 \sin \hat{L}_4} - 1 = 0$$

2.2 中点多边形的极条件方程的列立规律

(1) 如图 2 所示, 中点四边形中点 A、D、C、B 以顺时针方向来看;

(2) 由于以 E 点为极, 所以角度 $\hat{L}_3$ 、 $\hat{L}_6$ 、 $\hat{L}_9$ 、 $\hat{L}_{12}$ 用不到;

(3) 公式从 A 点处的角度开始, 在分子上, 越过连线依次取 $\hat{L}_{11}$ 、 $\hat{L}_8$ 、 $\hat{L}_5$ 、 $\hat{L}_2$ 的正弦; 在分母上, 不越过连线依次取的 $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_{10}$ 、 $\hat{L}_7$ 、 $\hat{L}_4$ 正弦。

3 扇形

如图 3 所示, 为一测角的扇形, 其图形的特点是: 分布有 A、B、C、D、E 五个点, 其中, A 为极点, B、C、D、E 四个外点彼此间首尾相连; 而 A 点与 B、C、D、E 四个点分别相连。图 3 中所示的扇形, 可认为是四点扇形。

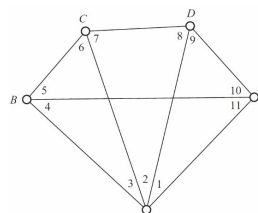


图 3

3.1 扇形的极条件方程的列立

由图 3, 可列出 5 个条件方程, 即 4 个图形条件, 1 个极条件 (以 A 点为极); 例如, 如图 3 所示, 以 A 为极, 则得极条件为

$$\frac{\sin(\hat{L}_4 + \hat{L}_5) \sin \hat{L}_7 \sin \hat{L}_9 \sin \hat{L}_{11}}{\sin \hat{L}_4 \sin \hat{L}_6 \sin \hat{L}_8 \sin(\hat{L}_{10} + \hat{L}_{11})} - 1 = 0$$

3.2 扇形的极条件方程的列立规律

(1) 如图 3 所示, 扇形中点 B、C、D、E、A 以顺时针方向来看;

(2) 由于以 A 点为极, 所以角度 $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 、 $\hat{L}_3$ 用不到;

(3) 公式是从 B 点处的角度开始, 在分子上, B 点处取两角度之和 $\hat{L}_4 + \hat{L}_5$, 然后越过连线, 依次取 C 点处的一个角 $\hat{L}_7$ 、D 点处的一个角 $\hat{L}_9$ 和 E 点处的一个角 $\hat{L}_{11}$ 的正弦; 在分母上, 不越过连线依次

(下转第 146 页)

(上接第 144 页)

在 B 点处取一个角 $\hat{L}_4$ 、C 点处取一个角 $\hat{L}_6$ 、D 点处取一个角 $\hat{L}_8$ ，最后是 E 点处取两角度之和 $\hat{L}_{10} + \hat{L}_{11}$ 。

4 结论

对于极条件方程的列立，还需注意以下几点：

(1) 对于中点多边形，当外围的点增多时，还有中点五边形、中点六边形等，统称中点 N 边形。同时，列极条件时，只能以中间点为极。

(2) 对于扇形，在外点增多时，还有五点扇形、六点扇形等，统称 N 点扇形。同时，列极条件时，只能以 A 点为极。大地四边形其实也是三点扇形。

(3) 对于大地四边形，其极条件方程的形式不是唯一的；当极点变化时，还可以有其它的表示形式。而中点多边形和扇形的极条件方程的形式往往是唯一的。

(4) 极条件方程的总体结构为分数形式。

参考文献

[1] 武汉大学测量平差学科组.误差理论与测量平差基础[M].武汉大学出版社, 2017 年 8 月第 3 版

[2] 泥立丽, 王永 等.测量平差辅导及详解[M].化学工业出版社, 2018 年 3 月

[3] 王永 等.利用 Excel 绘制误差椭圆的方法[J].矿山测量, 2008 年 12 月

[4] 泥立丽 等.基于 Excel 的绘制误差曲线的方法[J].矿山测量, 2010 年 6 月

作者简介：

李梦瑶 (1999-), 女, 汉族, 山东临沂人, 山东科技大学测绘工程专业 2017 级本科生