

基于 Logistic 模型的疫情管控模型

王诗臣 彭亚楠 刘文晟

(沈阳工业大学 辽宁)

摘要: 本文利用 Logistic 模型对新冠肺炎疫情的发展趋势进行预测, 将主要疫情国家分为两类, 分别采用建立 SIR 微分方程组及基于 Logistic 模型刻画阻滞生长过程的方法, 对两类国家的新冠肺炎疫情的发展趋势进行预测, 得出尽早将 COVID-2019 患者隔离对控制疫情发展有重要意义。

关键词: Logistic 模型; 新冠肺炎; 疫情预测

1. 问题背景

COVID-2019 已经成为世界流行性传染疾病, 给世界各国造成了巨大的影响。在疫苗和特效抗病毒药物研制出来之前, 科学家最关心的是 COVID-2019 传播的特征及发展趋势。本文用数学建模方法定量地研究 COVID-2019 传播规律, 对传播过程的描述、分析、预报和控制有着极其传播重要的作用。

2. 综合评价模型

设在时间为 t , 某区域人口总数为 M , 已感染冠状病毒的病人数为 $P(t)$, 则

感染冠状病毒的病人比率为 $f(t) = \frac{P(t)}{M}$, 健康者比率为

$$g(t) = 1 - f(t)。$$

设 K 为每个新冠肺炎病例平均每天传播的人数, E 为新冠肺炎病例每天平均被治愈人数比率 ($\frac{1}{E}$ 是这种传染病的平均病期), 则病人

每天增加人数为 $KMf(t)(1-f(t)) - EMf(t)$, 可得 Logistic 模型为

$$f'(t) = KMf(t)(1-f(t)) - Ef(t) = Kf(t) \left(1 - \frac{E}{K} - f(t)\right)$$

该方程为 Bernoulli 方程, 解为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{T}{T-1} + \left(\frac{1}{f(0)} - \frac{T}{T-1}\right)e^{-K(1-\frac{1}{T})t}}, & T \neq 1 \\ \frac{1}{Kt + \frac{1}{f(0)}}, & T = 1 \end{cases}$$

其中 $T = \frac{K}{E}$ 是每个病人在病期间平均传染的人数。

T 对于研究 $f(t)$ 的变化趋势是一个非常重要的指标, 对于 T 的三种不同取值时, 感染人数比率 $f(t)$ 变化趋势不同。

当 $T < 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, 表明新冠肺炎病例在病期间, 平均每个新冠肺炎病例传染的人数小于 1, 新冠肺炎病例被治愈后, 再次染病的机会不大 (根据新冠肺炎疫情的实际数据情况来看, 新型冠状病毒感染的确诊病例在治疗痊愈之后, 至少在半年之内对冠状病毒是有抵抗的, 不会出现再次感染现象。) 随着确诊例渐渐治愈, 新感染人数逐渐减少, 疫情形势逐渐放缓, 迎来拐点, 并逐步被控制。

当 $T = 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, 表明新冠肺炎病例在病期间, 平均每个新冠肺炎病例传染的人数恰好是 1, 这是边界情况。随着新增确诊病例增加放缓, 所有新冠肺炎确诊病例都会慢慢康复 (除死亡病例), 疫情出现平稳期, 逐渐消退, 只是这种情况的康复的速率比①的情况要缓慢。

当 $T > 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1 - \frac{1}{T}$, 表明新冠肺炎病例在病期间, 平均每个病例传染的人数大于 1, 表示疫情仍然在不断地扩散, 疫情的控制程度不太理想, 最终平稳期和拐点的出现还需要一定的时间。

为了彻底的消灭新冠病毒疫情, 最重要的是要将 T 值调成 $T < 1$ 。因 $T = KE$, 可减小病例平均每天传播的人数 K , 即使病人平均每日传染人数减少, 可对新冠病毒病人和疑似病例进行隔离以达到减少

每日传染人数的目的。加大每天平均被治愈人数比率 E , 这样也能缩短新冠病毒的病期, 例如说发明新疗法、新药、制造疫苗等。这些结论与实际情况相符合。

若能够将新冠病毒病人提前 T 天进行隔离, 那么新冠肺炎病人的传染人数将减少 $\frac{K - K(\frac{1}{E} - T)}{\frac{K}{E}}\%$, 若对新冠病毒病人延后 T 天进行

隔离, 则新冠肺炎病人的传染人数将会增加 $\frac{K(\frac{1}{E} + T) - \frac{K}{E}}{\frac{K}{E}}\%$ 。可以

看出, 为尽早控制 COVID-2019 疫情, 将新冠肺炎病人和疑似病例尽早进行隔离对控制疫情发展至关重要。

3. 区域预测模型

根据主要疫情国家的发展状况及特点, 将这些疫情国家分成两大类, 即

中国、意大利、日本、韩国、俄罗斯等疫情得到一定的控制的国家为第一类; 美国、印度等国家, 疫情控制较差的国家为第二类, 分别采用 SIR 模型及 Logistic 模型^[1]对两类国家疫情发展趋势进行预测。

3.1 第一类国家模型的建立

根据第一类国家新冠肺炎疫情实际, 建立 SIR 传染模型^[2], 将这些国家的人群分为易感染人群(S)、感染人群(I)和退出人群(R), 其中退出人群为治愈人群和死亡人群, 如图 1 所示

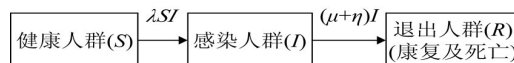


图 1: SIR 疾病传播模型

SIR 传染模型为 $\frac{dS}{dt} = -\lambda SI$, 运用差分递推法, 得日接

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - (\mu + \eta)I \\ \frac{dR}{dt} = (\mu + \eta)I \\ S + I + R = N \end{cases}$$

触率 $\lambda = -\frac{dS}{dt} \frac{1}{SI}$ 和日退出率 $\mu + \eta = \frac{(\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt})}{I}$, 其中 $\frac{dS}{dt}$

和 $\frac{dI}{dt}$ 表示相邻两周里 S 和 I 各自增加的人数。

根据第一类国家的实测数据, 利用第 t 天的 S 和 I 以及

$\frac{dS}{dt}$ 和 $\frac{dI}{dt}$ 的离散值

得出 λ 和 $\mu + \eta$ 的关于 t 的离散值, 用拟合方法分别求出 λ 和 $\mu + \eta$ 的多项式拟合函数。随着疫情的演化, 国家对疫情的控制和治疗水平会逐步提高, 有效接触率 λ 会在预测中呈下降的趋势, 考虑到精度要求, 选取奇次的 5 次多项式进行拟合。与此同理, $\mu + \eta$ 为退出率, 其中治愈率将出现上升的趋势, 这是因为随着人们防疫意识逐渐提升、政府控制措施得当, 以及积累了很多治疗经

验的必然结果,所以选取偶次的2次多项式进行拟合。经 *Matlab* 计算得拟合的结果为 $\lambda(t) = a_0t^5 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + a_5$, $(\mu + \eta)(t) = b_0t + b_1t + b_2$

在利用第一类国家的前20周数据^[4]得到的 λ 和 $\mu + \eta$ 关于 t 的拟合方程之后,下面进一步讨论如何利用已知的前20周数据,用差分递推方法对后10周确诊人数数据进行预测。

$$\frac{dS}{dt} = S_1 - S_{t-1}, \quad \frac{dI}{dt} = I_1 - I_{t-1}, \quad \begin{cases} S_t = \frac{S_{t-1}}{\lambda I_t - I_{t-1}} \\ I_t = \frac{I_{t-1}}{[1 + (\mu + \eta) - \lambda S_t]} \end{cases} \quad (a)$$

为实现模型预测,整理为迭代的形式:

$$S_t = \frac{1}{2\lambda} [\lambda I_{t-1} + 1 + (\mu + \eta) + \lambda I_{t-1} - \sqrt{(\lambda I_{t-1} + 1 + (\mu + \eta) + \lambda S_{t-1})^2 - 4\lambda(1 + \mu + \eta)}]$$

$$I_t = \frac{I_{t-1}}{(1 + \mu + \eta - \lambda S_t)}$$

由第一类国家 *COVID-2019* 累计确诊人数数据可知 $S_0 = 104297013$, $I_0 = 940$ 。将 λ 和 $\mu + \eta$ 代入式(a),可得中国感染人群的理论值。从图2可看出中国感染人群实际值和模型计算出的理论值随时间变化的走势基本相同,曲线总体吻合较好。

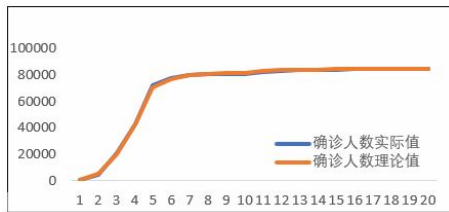


图2: 中国感染人群实际值和理论值

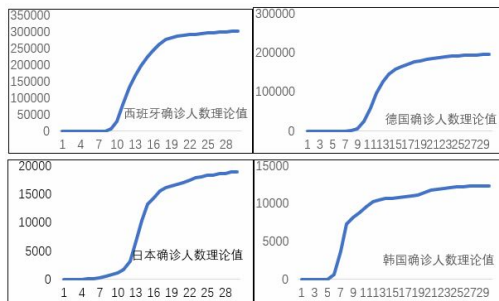


图3: 西班牙、德国、日本、韩国感染人群实际值和理论值

3.2 第二类国家模型的建立

针对第二类国家,可用 *Logistic* 自然增长模型,患病人数的增长

为: $\begin{cases} \frac{dI}{dt} = rI(1 - \frac{I}{N}) \\ I(0) = 1 \end{cases}$, 其中 t 为距首例患者被发现时的天数; N 为人口总数; r 为 *Logistic* 模型中的固有增长率; $I(t)$ 为第 t 周的已确诊的病人数; 时间 t 是建立在以中国疫情爆发的起始时间为起点。可得 $I(t) = \frac{1}{[1 + (N-1)e^{-r(t-x)}]}$, x 为第二类疫情国家疫情开始的时间与中国疫情起始时间之差(单位:周)。

美国于1月21日^[5]公布第一例新冠肺炎,印度于3月12日公布第一例新冠肺炎病例。

综合考虑到生物学中 *J* 型增长曲线及 *S* 型增长曲线,印度和美国的确诊人数不会一直呈现指数增加。在这里我们仅预测未来10周的美国和印度的疫情趋势走向,得到美国和印度的疫情走向趋势图。

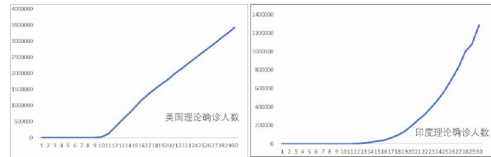


图4: 美国和印度的疫情走向趋势图

4. 结论

研究结果证实了减少集会、避免接触、集中收治等降低人群接触率的防疫措施,可以有效控制 *COVID-2019* 的传播、遏制疫情的发展。如果提前采取严格的隔离措施,峰值最终稳定期均会提前到来。本文研究结果将为后续疫情防控和未来类似事件应对提供参考。

参考文献

- [1] 姜启源编. 数学模型[M]. 北京, 高等教育出版社, 1993.8 第2版
- [2] 夏承遗, 刘忠信, 陈增强. 移动群体中基于 *SIR* 模型的疾病传播行为[J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(5): 1274-1277.
- [3] 中华人民共和国国家卫生健康委员会. 新型冠状病毒感染的肺炎疫情最新情况[EB/OL]. [2020-05-31]
- [4] 新冠疫情实时跟踪_腾讯新闻 https://news.qq.com/zt2020/page/feiyan.htm?chlid=news_news_top&devid=c2c75d29924eb0eb&qimei=67a4b12149ad116c#/gl_obal?ADTAG=hwai
- [5] 美国第一例病例的全过程_手机网易网.[2020-02-02]