探讨全概率公式在二维随机变量函数中的应用

蒋凌云

（湖北经济学院　湖北　武汉　430205）

摘要：通过对近几年的考研数学真题分析，探讨全概率公式在求二维随机变量函数概率分布中的应用，归纳整合对应的解题思维与技巧，以期对考研学生掌握此类热门考题有所帮助.

关键词：全概率公式；二维随机变量；独立

1、引 言

求解有关二维随机变量函数 Z=g(X,Y)的概率分布情况一直是考研概率中的重点，也是难点!这类题型综合性强，易于考察学生对整个概率知识点的掌握程度，尤其是其中一类二维随机变量函数 Z=g(X,Y)，其中 X,Y 一个为离散型随机变量一个为连续型随机变量，成为近几年研究生入学考试数学科目命题的热点.基于本人多年的考研辅导经验及其对近十年考研数学命题的研究，现将这类题型的命题方式，命题类型及其求解方法和技巧归纳整合，期望对于考研教师辅导以及学生在应考过程中有所帮助.

2、预备知识

2.1 (全概率公式)设随机试验 E 的样本空间为Ω，$A_1,A_2,\cdots,A_n$为Ω的一个剖分，且 $P(A_i>0)(i=1,2,\cdots,n)$,则对任何事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

全概率公式是概率论与数理统计的基本公式，也是教学中的重点和难点.在学习过程当中对全概率公式的理解不能局限于求古典概型，实际上全概率公式应用广泛,比如可以应用于计算随机变量函数的分布.

2.2 构成二维随机变量 Z=g(X,Y)因 X,Y 的类别不同可分三类，一类为 X,Y 都为离散型随机变量，则构成的二维随机变量 Z=g(X,Y)一般也为离散性型的，可以利用离散型全概率公式去分析相关问题，典型题型如 2018 年考研数学三第 22 题等；一类为 X,Y 都为连续型随机变量，则构成的二维随机变量 Z=g(X,Y)一般也为连续型的，可以用下面的知识点 2.3 去解答相关问题，典型题型如 2012 年数学三第 23 题等，同时在小题中结合其它知识点出现的频率较高；但近十年来有关求二维随机变量函数的热点题型为下面这种,已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 f(x),离散型随机变量 Y 的分布率为 $P\{Y=k_i\}=p_i$ (i=1,2,···),设有二维随机变量函数 Z=g(X,Y),由分布函数定义以及全概率公式可得

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\sum_{i=1}^{n}P\{Y=k_i\}P\{g(X,Y)\le z|Y=k_i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P\{Y=k_i\}\frac{P\{Y=k_i,g(X,Y)\le z\}}{P\{Y=k_i\}}=\sum_{i=1}^{n}P\{Y=k_i,g(X,k_i)\le z\}$$

2.3 已知二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度 f(x,y),假设 f(x,y)在平面内的某个区域 D 上取值大于零，则有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{(x,y)\in G}f(x,y)dxdy=\begin{cases}\iint\limits_{G\cap D}f(x,y)dxdy, & G\cap D\ne\Phi\\ 0, & G\cap D=\Phi\end{cases}$$

3、变量不相互独立

在求解二维随机变量函数 Z=g(X,Y)的分布函数时需要注意两方面的问题，第一为常规的求分布函数的问题，即需讨论 z 的不同取值来确定 $P\{Y=k_i,g(X,k_i)\le z\}$的对应区域，第二为因为 X,Y 不独立，所以 $P\{Y=k_i,g(X,k_i)\le z\}$为求平面区域内的点对应的概率,计算难度一般会大于相互独立的情况.

例 1、(2016) 设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$，求 Z=U+X 的分布函数 $F_Z(z)$

解　由已知条件易得 $f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\0, \quad 其它\end{cases}$，

且 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$知 U,X 不相互独立,则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=P\{U+X\le z\}$$
$$=P\{U=1,X\le z-1\}+P\{U=0,X\le z\}$$
$$=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}$$

当 z<0 时，$F_Z(z)=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}=0+0=0$；

当 0 ≤ z<1 时，$F_Z(z)=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}=0+3\int_0^z(x-x^2)dx$，

$=\frac{3}{2}z^2-z^3$；

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}=3\int_0^{z-1}(\sqrt{x}-x^2)dx+\frac{1}{2}$，

$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$；

当 z≥2 时，$F_Z(z)=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

所以 Z=U+X 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

4、已知变量相互独立

当 X,Y 相互独立时，则 $P\{Y=k_i,g(X,k_i)\le z\}=P\{Y=k_i\}P\{g(X,k_i)\le z\}$,即只需求对应的一维随机变量相关概率,此类考题为近几年考研概率热门题型.

例 2、(2017) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，Y 的概率密度函数为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 Z=X+Y 的概率密度.

解　Z 的概率密度记为 $F_Z(z)$，X,Y 相互独立，于是

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X=0,Y\le z\}+P\{X=2,Y\le z-2\}$$
$$=P\{X=0\}P\{Y\le z\}+P\{X=2\}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}$$

（下转第 149 页）

（上接第 147 页）

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$;

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}\int_0^z 2ydy+0=\frac{z^2}{2}$;

当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}\int_0^1 2ydy+0=\frac{1}{2}$;

当$2\le z<3$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2} 2ydy=\frac{1}{2}+\frac{(z-2)^2}{2}$;

当$z\ge 3$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1 \\ z-2, & 2\le z<3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 3、(2019) 设随机变量 X,Y 相互独立,X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为

$P\{Y=-1\}=p, P\{Y=1\}=1-p$, 令$Z=XY$, 求$Z$的概率密度.

解　$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{Y=-1,-X\le z\}+P\{Y=1,X\le z\}$

$=P\{Y=-1\}P\{X\ge -z\}+P\{Y=1\}P\{X\le z\}=pP\{X\ge -z\}+(1-p)P\{X\le$

因为 X 服从参数为 1 的指数分布，所以

$$f_X(z)=\begin{cases} e^{-z}, z>0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases},\qquad f_X(-z)=\begin{cases} e^{z}, z<0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

则

$$f_Z(z)=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)=\begin{cases} (1-p)e^{-z}, & z>0 \\ pe^{z}, & z\le 0 \end{cases}$$

例 4、(2020) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1,X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$,证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

证明　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y\}$

$=P\{X_3=0,X_2\le y\}+P\{X_3=1,X_1\le y\}$

因为 X_1,X_2,X_3 相互独立

$F_Y(y)=P\{X_3=0\}P\{X_2\le y\}+P\{X_3=1\}P\{X_1\le y\}$

因为 X_1,X_2 均服从标准正态分布

$F_Y(y)=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)$,所以 Y 服从标准正态分布

5、结论与认识

本文研究的重点题型为求二维随机变量函数 Z=g(X,Y)的概率分布，其中为 X,Y 一个为离散型随机变量一个为连续型随机变量，从本文的例题可以发现解答此类题型主要抓住全概率公式的思维，利用其中的离散型随机变量将分布函数所对应的概率剖分求解;如果变量不相互独立，则可能涉及到在不同区域内求概率即需要对应不同区域进行二重积分，如果变量之间相互独立，则能转换为对应的一维变量求相关概率，则相对计算比较简单.但是不管是何种情况，我们都是用分布函数的定义法求二维随机变量函数的分布函数，都会涉及到对应变量的范围讨论问题，这些都需要考生有一定的知识积累，以及对二维随机变量分布函数、概率分布、密度函数的定义以及彼此之间的相互连续有系统全面的理解与掌握，通过此文的学习，希望考生都养成自己系统归纳知识点，对重点题型自行总结归纳解题方法和应对技巧的习惯.

参考文献:

[1]盛骤，概率论与数理统计，高等教育出版社 2008.

[2]2010~2020 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题，中国教育在线.