# 巧用对称思想破解高考几何问题

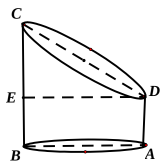
郑辉平

（江西师大附中　江西 南昌　　330046）

对称思想：若变量 $a,b,c$ …能依次轮换，相互代替，而结果不变，则关于 $a,b,c$ … 的代数式的最大(小)值，一定是在 $a=b=c=\cdots$ 时取得.在几何中也经常出现在某种一下对称的形或式.如果充分利用对称的原理，可使我们在解决这个问题时，多有一条有效的通道，而且常能起到化繁为简、事半功倍的效果.本源就是特殊化的思想.

【例题 1】如图，一个圆柱被一个平面所截，所截的截面椭圆长轴长为 5cm，短轴长为 4cm，截得后的图形最短母线长为 2cm，则这个几何体的体积为__________.

【答案】$14\pi$



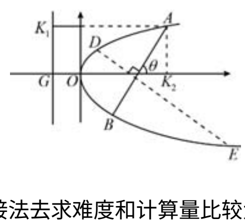

【分析】这个图形既不是圆柱也不是圆台更不可能是圆锥，直接计算它的体积肯定是不行的，我们只能利用对称性原理在它的上面补上一个完全相同的几何体，使之成为一个完整的圆柱.

【解析】由题意可知：圆柱底面的直径是截面椭圆的短轴长 $4cm$，又长轴长为 $5cm$

因此 $CE=\sqrt{5^2-4^2}=3cm$，$BC=5cm$,补全的圆柱的母线长为 $7cm$ 则所求的几何体的体积为 $V=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times7=14\pi$.

充分利用几何图形的对称性，能化难为易，化繁为简.

【例题 2】(2017 全国理科Ⅰ卷）已知 $F$ 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 $F$ 作两条互相垂直的直线 $l_1,l_2$，直线 $l_1$ 与 $C$ 交于 $A,B$ 两点，直线 $l_2$ 与 $C$ 交于 $D,E$ 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为________.




【答案】A

【解析】用直接法去求难度和计算量比较大，但考虑到变量线段 $AB,DE$ 是轮换对称的，用对称的思想，当 $AB=DE$ 时，此时 $AB,DE$ 关于 $x$ 轴对称,当 $AB$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 时取得 $|AB|+|DE|$ 最小值为 16，

充分利用两个变量的对称性能化难为易，化繁为简，本源就是特殊的思想.

【例题 3】(2018 全国理科Ⅰ卷）已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 $\alpha$ 所成的角都相等，则 $\alpha$ 截此正方体所得截面面积的最大值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

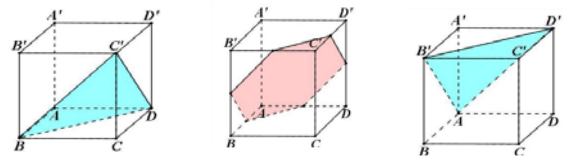



图 1　　图 2　　图 3

【解析】(1) 因为一组平行线与已知平面所成的角都相等，将每条棱与截面所形成的角化归为同一顶点出发的三条棱与截面所成角.根据经验能直观感知到平面 $AB'D'$ 是符合要求的平面（图 1），由对称性可知，平面 $BDC'$ 也是符合要求的平面（图 2)，且与平面 $AB'D'$ 平行的平面都与这三条直线所成的角相等.

(2) 该截面的形状为：正三角形→ 六边形 → 正六边形→六边形→正三角形 .显然截面面积由小到大，再由大到小.由此可以判断（或猜想）出当截面形状为正六边形时，截面面积应该最大（图 3）.

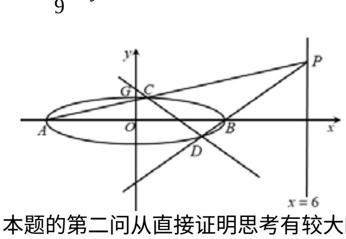
(3) 求出该正六边形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，这恰好是四个选项中最大的数，所以选 A.

此法几何图形变化的对称性,能有效、迅速求解，达到了事半功倍的效果，本源是特殊化的思想运用.

【例题 4】(2020 全国Ⅰ卷理科 20) 已知 $A,B$ 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 的左、右顶点，$G$ 为 $E$ 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，$PA$ 与 $E$ 的另一交点为 $C$，$PB$ 与 $E$ 的另一交点为 $D$.

(1) 求 $E$ 的方程；(2) 证明：直线 CD 过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$；(2) 故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.




【分析】本题的第二问从直接证明思考有较大的难度，如果考虑到动点 P 的变化会使得 PA，PB 两直线变化是轮换对称的，所以直线 CD 过的定点一定在 $x$ 轴上，从这个角度去思考，直接找到这个定点在去做题让思路更清晰，目标更明确，从而化难为易.

案例说明

以上的例子让我们见识了对称的思想在几何题中的渗透是如此的广泛，也非常实用.应用数学的对称美使我们在解题中更简便，更有效．在解题时，可以根据问题的特点去发掘潜在的对称关系或构造某种对称性，使问题得到巧妙快捷的解决，数学中绚丽多彩的对称美，给我们提供了种种奇妙的解法，同时也给我们带来美的享受．当然本源是特殊化的思想.