# 泰勒公式与等价代换在求极限中的比较应用

龙琮

（成都锦城学院）

摘要：本文对比分析了等价代换和泰勒公式两种方法在求极限中的应用以及优劣，总结了它们的使用条件以及注意事项，这对提高解题速度和效率有一定的帮助。

关键词：泰勒公式；等价代换；极限

极限是研究函数的基本方法。因此，求极限就显得非常重要。求极限的方法具有多样性和交互性，一题多解是常态，区别在于不同的方法可能使得解题的难易程度不同。

在教学的过程中，笔者发现合理的应用等价代换，将极大的简化求解过程，但一定要注意其适用情形：当分子或分母是几个无穷小之积时，因子必可使用等价代换；当分子或分母是无穷小相加减时，使用等价代换算出的答案会出现有时正确有时错误的情况。

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3}$

误解：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$

分析：该题错在分子是两项之差，却应用了等价代换。

解(等价代换法):原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx\cdot(1-cosx)}{cosx\cdot x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{cos0\cdot x^3}=\frac{1}{2}.$$

解(泰勒公式法):原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]}{x^3}=\frac{1}{2}.$

例 2　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

解(等价代换法)：原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

分析：该题满足极限的运算法则，故用等价代换是可行的。

解(泰勒公式法)：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-(1-2x^2+o(x^2))}{x^2}=\frac{3}{2}$

由上述例题不难发现，凡是能用等价代换求解的必可用泰勒公式法求解。用泰勒公式求极限的难点在于将展式展开到第几项。现总结如下两种基本情形：

1、形如 f(x)–g(x)的不定式，采用左右相消,幂次最低原则，即将 f(x)和 g(x)分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止。

例 3　已知当 x→0 时，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 $ax^b$ 为等价无穷小，求 a,b.

分析：按幂次最低原则，显然只需展开到第三项就行。

解：由于

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{ax^b}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]-[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)]}{ax^b}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4}{ax^b}$$

故 $a=-\frac{1}{12},b=4.$

2、形如 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 的不定式，采用上下同阶原则。

例 4　求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2-cosx}-1-\frac{1}{6}x^2}{x^4}.$

分析：当用其他方法无法快速求出极限时，建议采用泰勒公式法求解。

解：利用麦克劳林展式：当 x→0，$1-cosx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4),$

从而 $\sqrt[3]{2-cosx}=\sqrt[3]{1+(1-cosx)}$

$$=1+\frac{1-cosx}{3}-\frac{(1-cosx)^2}{9}+o((1-cosx)^2)$$

$$=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

故原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{[1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)]-1-\frac{1}{6}x^2}{x^4}=-\frac{1}{24}$

综上可知，等价代换的方法用对了会很好用，但使用时有一定的局限性。而泰勒公式法则没有这样的限制，凡是能用等价代换求解的题一定可用泰勒公式求解。不过利用泰勒展式求极限有时会稍微繁琐一些。因此笔者建议：凡可以使用等价代换的优选等价代换，其余均可用泰勒公式。

**参考文献**

[1]同济大学数学系.高等数学(同济七版) [M].北京:高等教育出版社 ,2017.

[2]华东师范大学数学系.数学分析(上册).第四版[M].北京：高等教育出版社，2010:138−141.

[3]陈叻，赵向青，吴涛，Taylor 公式求极限时“阶”的讨论[J].高等数学研究,2019, 22(5):16−18.

---

（上接第 99 页）

联了起来，对文章主题的认识可以有一个整体化的把握。

在课后学习阶段，教师可以引导学生以手工的形式将思维导图制作出来，进行深度阅读，然后以作业的形式拿到下节课去分享。这样可以保证学生充分理解文章内容，锻炼学生自我归纳和自我分析以及自我反思的能力。

### 3 结论

思维导图与大学基础英语阅读教学的有机结合，可以让教师的想法和设计更清晰地展现在学生面前，也能让学生在阅读课文时更清楚地理解上下文，掌握文章，使其更加形象化和具体化。在实践中，对于教师来说，它可以为教师的教学设计提供一种新的思维方式，帮助教师制定创新的教学策略。对于课堂，提高教学效率，形成轻松愉快的课堂氛围。

**参考文献；**

张芳芳.借助思维导图提升大学英语阅读能力的路径探索[J].科学与财富, 2020 , 12 (36): 89, 91.

[2] 陈静. 思维导图在大学英语阅读课程教学中的应用研究[J]. 新教育时代电子杂志（教师版）, 2020 (35) :182−183.

[3] 李莉.思维导图在高职大学英语阅读教学中的应用研究[J]. 产业与科技论坛, 2019, 18 (5): 179−181.

[4] 陈洁明. 思维导图在大学英语阅读教学中有效性的实证研究——以集美大学诚毅学院学生为例[D]. 辽宁: 大连海事大学, 2018.