分析具有脉冲接种的时滞的传染病模型的研究

郭莹

（黑龙江工业学院 现代制造工程学院 黑龙江 鸡西 158100 ）

摘要：研究具有脉冲接种的时滞性 SIRS 传染病模型.运用比较原理,得到 SIRS 传染病模型的无病周期解的全局渐近稳定性一些充分条件.

关键词：脉冲接种; SIRS 模型;全局渐近稳定.

中图分类号：O175.14 文献标识码：A

Analysis of a delayed epidemic model with impulse vaccination

GUO Ying

(Modern Manufacturing Engineering College of Heilongjiang Institute of Technology, Jixi,158100)

Abstract: A model of SIRS infectious disease with a time delay of pulse inoculation.By using the comparison principle,some sufficient conditions for the global asymptotic stability of the disease-free periodic solution of the system are obtained.

Key words: Impulsive vaccination;SIRS model; global asymptotically stable.

CLC number: O175.14 Document Code: A

0 引言

利用动力学模型去研究和控制传染病是生物数学的一个重要分支.许多的学者研究传染病模型,以便更好地理解和很好的控制流行传染病的实际情况,并得到了一些很好的结论.本文考虑如下具有脉冲接种的时滞 SIRS 模型

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\dot S(t)=A-\mu S(t)-\beta S(t)I(t)+\eta exp(-\mu\tau)R(t-\tau)\\ \dot I(t)=\beta S(t)I(t)-(\mu+\alpha+\delta)I(t)\\ \dot R(t)=\delta I(t)-\mu R(t)-\eta exp(-\mu\tau)R(t-\tau)\end{array}\right\} t\neq n\tau,n\in\mathbb{N}\\ \left.\begin{array}{l}S(t^+)=(1-\rho)S(t)\\ I(t^+)=I(t)\\ R(t^+)=R(t)+\rho S(t)\end{array}\right\} t=n\tau,n\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{1}$$

其中,参数 A、μ 及 β 都是正数,δ、α 及 η 是非负常数,A 是易感染者的补充率;μ 是易感染者、感染者及移出者的自然死亡率. β 是易感染者平均接触率;α 是感染者因病死亡率相关系数;δ 是恢复率系数;η 是免疫丧失率系数, $\eta>0$ 意味着恢复个体失去的免疫力,$\eta=0$ 意味着个体以永久基本恢复免疫模型功能;$\rho\in(0,1)$ 是接种比例的成功;τ 表示进行免疫期,单位时间内可以恢复者转化为易感染者所占的比例 $\eta\exp(-\mu\tau)R(t-\tau)$.

考虑到生态学原因,模型(1)初始条件为

$$\begin{array}{c}S(\varsigma)=\phi_1(\varsigma),I(\varsigma)=\phi_2(\varsigma),R(\varsigma)=\phi_3(\varsigma),\\ -\tau\le\varsigma\le 0,\phi_i(0)>0,i=1,2,3\end{array}\tag{2}$$

其中 $\Phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)^\tau\in PC_+$, PC_+ 是分段连续函数空间. Φ_t 在 $t=-n\tau$ 处左连续,模型(1)最大不变集为 $D=\left\{(S,I,R)\in\mathbb{R}_+^3\,\middle|\,S+I+R\le\frac{A}{\mu}\right\}$

1 预备知识

研究模型(1)的周期解的存在性以及全局渐近稳定性.首先给出重要的引理,证明主要结果.在本节中,我们证明模型(1)无病周期解的存在性及全局渐近稳定性,我们将给出一些引理来证明主要结果.

引理 1[1]考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases}\frac{d\varpi(t)}{dt}=a-b\varpi(t),t\neq n\tau,n\in\mathbb{N}\\ \varpi(t^+)=(1-\rho)\varpi(t),t=n\tau,n\in\mathbb{N}\end{cases},\tag{3}$$

其中 $a,b>0,0<\rho<1$,则模型(3)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解 $\varpi^*(t)$.

引理 2[2]考虑脉冲微分模型

$$\begin{cases}\frac{d\varpi(t)}{dt}=a-b\varpi(t)-c\varpi(t-\tau),t\neq n\tau,n\in\mathbb{N}\\ \varpi(t^+)=(1-\rho)\varpi(t),t=n\tau,n\in\mathbb{N}\end{cases},\tag{4}$$

并且 $a>0,b>c>0$ 及 $0<\rho<1$,模型(4)存在唯一的全局渐近稳定的周期解 τ .

2 主要结果

模型(1)无病周期解的存在性[3],有如下情况：即 $I(t)\equiv 0,t>0$.

模型(1)如下子模型

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\dot S(t)=A+\eta\frac{A}{\mu}exp(-\mu\tau)-\mu S(t)-\eta exp(-\mu\tau)S(t-\tau)\\ \dot R(t)=-\mu R(t)-\eta exp(-\mu\tau)R(t-\tau)\end{array}\right\} t\neq n\tau,n\in\mathbb{N}\\ \left.\begin{array}{l}S(t^+)=(1-\rho)S(t)\\ R(t^+)=R(t)+\rho S(t)\end{array}\right\} t=n\tau,n\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{5}$$

引理 2 知,当 $\mu>\eta\exp(-\mu\tau)$ 时,模型(5)存在唯一全局渐近稳定的 τ 正周期解.将 $S^*(t),R^*(t)$ 表示周期解,得模型(1)的无病周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$,则有如下结论.

定理 1 记

$$\sigma'=\frac{A\beta}{\mu^2}\frac{(\mu+\eta\exp(-\mu\tau))(1-\exp(-\mu\tau))}{(1-(1-\rho)\exp(-\mu\tau))(\mu+\alpha+\delta)}$$

如果是 $\mu>\eta\exp(\mu\tau)$ 和 $\sigma'<1$,则无病周期解全局渐近稳定.

证明: 因 $\sigma'<1$,可知 $\sigma<1$.下面需证明无病周期解的全局吸引[4].由 $\sigma'<1$,选取足够小的 $\varepsilon_0>0$,使得 $\beta\zeta<\mu_2+\alpha+\delta$,其中

$$\zeta=\frac{A}{\mu^2}\frac{(\mu+\eta\exp(-\mu\tau))(1-\exp(-\mu\tau)}{1-(1-\rho)\exp(-\mu\tau)}+\varepsilon_0$$

由模型(1)的第一个方程辅助模型得

$$\begin{cases}\frac{d\Gamma(t)}{dt}=A+\eta\frac{A}{\mu}exp(-\mu\tau)-\mu\Gamma(t),\ t\neq n\tau,n\in\mathbb{N}\\ \Gamma^+(t)=(1-\rho)\Gamma(t),\ t=n\tau,n\in\mathbb{N}\end{cases},\tag{6}$$

由引理 1，得(6)的正周期解 $\Gamma^*(t)$.

上述分析讨论,(6)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解 $\Gamma^*(t)=S^*(t)$.

模型(1)中,令初始条件为(2)且 $S(0^+)=S_0>0$ 的解是 $(S(t),I(t),R(t))$,$\Gamma(t)$ 是(7)初始条件 $\Gamma(0^+)=S_0$ 的解.通过脉冲微分方程比较原理[5],存在整数 $n_1>0$,使得 $S(t)<\Gamma^*(t)+\varepsilon_0\le\zeta$,进而,得当 t 趋近于无穷时, $h(t)$ 的极限为 0. 利用比较原理,得 $\limsup\limits_{t\to\infty}I(t)\le\limsup\limits_{t\to\infty}h(t)=0$ 和 $I(t)$ 正性, 得当 t 趋近于无穷时,$I(t)$ 的极限为 0.

$\forall\varepsilon_1\in(0,1)$,存在整数 $n_2>n_1$,使得当 $t>n_2\tau$ 时,有 $I(t)<\varepsilon_1$.

再令 $\Psi(t)=|S(t)-S^*(t)|$,由模型(5)和模型(1)的第一个方程,存

在整数 $n_3 > n_2$，当 $t = n_3\tau$ 时，有 $\Psi(t^+) = (1-\rho)\Psi(t)$，其中 $K = 2\eta\exp(-\mu\tau)$.当 $t > n_3\tau$ 时,时滞微分辅助方程

$$\varphi'(t) = K\varepsilon_1 - \mu\varphi(t) + \eta\exp(-\mu\tau)\varphi(t-\tau),(7)$$

根据引理 2,对(7)的任意解 $\varphi(t)$,有当 t 趋近于无穷时,$\varphi(t)$ 的极限为 $\dfrac{K\varepsilon_1}{\mu-\eta\exp(-\mu\tau)}$,当 $t \ge n_3\tau$ 时,所有 $0 \le \Psi(t) \le \varphi(t)$ 成立.当 $t \ne n_3\tau$,初始条件为 $\varphi(t) = |S(t) - S^*(t)|$ 时,(7)的解为 $\varphi(t)$.因此,存在整数 $n_4 > n_3$,推知当 t 趋近于无穷时,$S(t)$ 的极限为 $S^*(t)$.类似于,因当 t 趋近于无穷时,得 $R(t)$ 的极限为 $R^*(t)$.证毕.

推论：如果 $\rho > \rho'$ 和 $\mu > \eta\exp(-\mu\tau)$，那么模型(1)无病周期解全局渐近稳定，其中

$$\rho' = \frac{(1-\exp(\mu\tau)[\mu^2(\mu+\alpha+\delta) - A\beta(\mu\exp(\mu\tau)+\eta)]}{\mu^2(\mu+\alpha+\delta)}$$

注：疫苗成功率越大,疾病会消失.

3 总结

本文设计的脉冲接种的时滞的传染病模型,对此模型结论还不多,所以我们所得到的结论都是新的,使得我们的研究成果更具有一般性.进一步,通过使用比较原理,得到该模型无病周期解的全局渐近稳定性.并可推得 $\rho > \rho'$ 时,该模型无病周期解是全局渐近稳定性的.推论表明,疾病逐渐消失.

脉冲时刻和延迟时间选取相同时刻 τ,那么针对脉冲时刻和延迟时间不同的时候,我们将得到什么结果呢?将是十分有趣的事情,这将是作者以后努力的方向.

参考文献:

[1]Lakshmikantham.V,Bainov.D.D,Simeonov.P.C,Theory of Impulsive Differential E−quations[J]. Singapore,World Scientific,1989.

[2]Teng.Z,Zhang.T,Extinction and permanence for a pulse vaccination delayed SEIRS epidemic model[J].Chaos Solit Frac,2009,39:2411−2425.

[3]Bainov.D, Simeonov.P, Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Appli− cations[J].Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics,V1993,66.

[4]Onofrio.D.A,Mixed pulse vaccination strategy in epidemic model with realistic distributed infectious and latent times[J].Appl Math Comput,2004,151:181−187.

[5]Kermack.W,McKenderick.A.Contributions to the mathematical theory of epidemics[J].Proc. Roy.Soc., A141(1933),94−122.