数形结合中切线的应用
——以 2020 高考全国 I 卷文科数学第 20 题为例

林顺刚

（湖北省十堰市湖北汽车工业学院数理与光电工程学院）

摘要：函数的零点或者方程的解等这些抽象的代数问题可以通过数形结合转化为直观的平面曲线的交点问题，在这类问题中，直线与曲线的相交问题最多，而直线一般为曲线上某点处的切线，掌握了切线在数形结合中的应用可以直观简洁解题.

关键词：导数；切线；曲线的凹凸；零点；方程的根

一、切线的定义及求法

中学教材对曲线上某一点处的切线没有具体的定义，如果用“与曲线有一个交点的直线”作为切线的定义有失准确，可以用逼近的思想来定义.

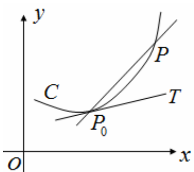

图1

定义 1：曲线 C 上定点 P_0，取异于点 P_0 的点 P，当 P 沿着曲线 C 无限接近点 P_0 时，连接两点 P_0, P 所得直线即为曲线 C 上点 P_0 处切线，P_0 称为切点.

如图 1，直线 P_0T 即为曲线 C 上点 P_0 处切线.

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的几何意义即为函数 $y=f(x)$

图像上点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率，由直线的点斜式方程可得切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，此为求切线的一般方法，是高中导数学习中的重要知识点，实际应用中，一般要结合两点确定的直线斜率计算、点在曲线上满足的条件等知识点.

例如，为了在函数 $y=e^x$ 图像上找一点使该点处切线过点 $(-2,0)$，设该点为 (x_0, y_0)，该点处切线斜率 $k=f'(x_0)=e^{x_0}$，切线要过点 $(-2,0)$，连接其与切点所得直线即为切线，故有 $e^{x_0}=(y_0-0)/[x_0-(-2)]$，另外点 (x_0, y_0) 在函数 $y=e^x$ 图像上，故有 $y_0=e^{x_0}$，联立两方程解得 $x_0=-1$，$y_0=e^{-1}$，故所求点为 $(-1,e^{-1})$，当然也可以先求出点 (x_0,e^{x_0}) 处切线方程 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，然后将点 $(-2,0)$ 代入切线方程求得.

二、曲线的凹凸及判断

为更好阐述数形结合时切线的应用，现在定义函数 $y=f(x)$ 的图像也即曲线 $y=f(x)$ 的凹凸.

定义 2:曲线 $y=f(x)$ $(x\in D)$，区间 $I\subseteq D, \forall x_1, x_2\in I$，

（1）若 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称曲线在 I 内是凹的；

（2）若 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称曲线在 I 内是凸的.

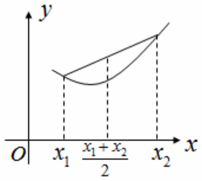

图2

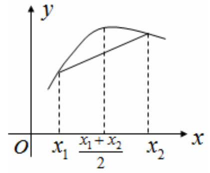

图3

图 2 中曲线是凹的，从图中可以看出，随着 x 增大，曲线上各点处切线的斜率是增大的，也即导函数 $y=f'(x)$ 是单调递增的；图 3 中曲线是凸的，随着 x 增大，曲线上各点处切线的斜率是减小的，也即导函数 $y=f'(x)$ 是单调递减的，也即可以通过判断导函数 $y=f'(x)$ 的单调性来判断曲线 $y=f(x)$ 的凹凸.如 $y=e^x$，由 $(y')'=e^x>0$ 知 $y'=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增，故曲线 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

三、切线解决函数零点问题应用举例

例 1、【2020 全国 I 卷文科第 20 题】已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

在此仅考虑第 2 问，利用数形结合，容易得到第 2 问可转化为求曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=a(x+2)$ 有两个交点时参数 a 的范围.直线 $y=a(x+2)$ 过定点 $(-2,0)$，由前面可知，曲线 $y=e^x$ 上点 $(-1,e^{-1})$ 处切线恰好过点 $(-2,0)$（图 4），此时切线斜率为 e^{-1}，而曲线 $y=e^x$ 是凹的，当直线 $y=a(x+2)$ 在此切线上方时，直线与曲线 $y=e^x$ 才有两个交点，故直线 $y=a(x+2)$ 的斜率 a 大于 e^{-1} 时，直线和曲线才有两个交点（图 5），即 $a>e^{-1}$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

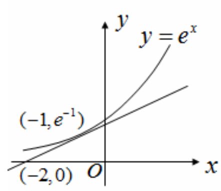

图4

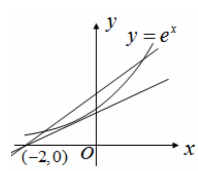

图5

若曲线是凸的，则过定点的直线在切线下方时直线与曲线有两个交点，此时直线斜率小于切线的斜率.在用切线来解决函数零点问题时，找定点和切线再结合曲线的凹凸很容易直观解决相关问题.

四、切线解决方程的解的问题应用举例

例 2、方程 $\ln x-mx=0$ 有且仅有两个不相等的实数解，求实数 m 取值范围.

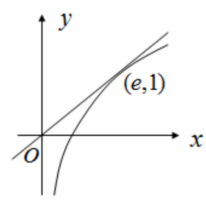

图6

利用数形结合，本题可转化为曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=mx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同交点时求实数 m 的范围.直线 $y=mx$ 过原点，用前面讲的方法可以求得曲线 $y=\ln x$ 上点 $(e,1)$ 处切线过原点，此时切线斜率为 e^{-1}，且曲线 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的，故当直线 $y=mx$ 在 x 轴和切线之间时，才有两不同的交点（图 6），此时直线 $y=mx$ 的斜率小于 e^{-1}，但必须大于 0，即 $m\in(0,e^{-1})$.当 $m\le 0$ 或 $m=e^{-1}$ 时，方程有一个解；当 $m>e^{-1}$ 时，方程无解.

总之，函数零点或者方程的解有关的题目大部分都是求参数的范围，利用数形结合，将之转化为直线和曲线的交点问题，充分利用切线和曲线的凹凸，可以直观简洁解决问题.