

“数形结合”把握函数的图像与性质

陆立为 顾向忠

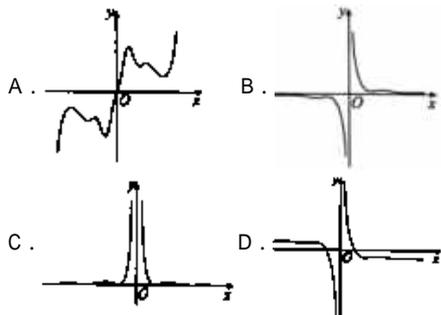
(启东市汇龙中学高一(7)班 启东市汇龙中学)

数形结合是研究数学问题的有效途径和重要策略,它体现了数学的和谐美、统一美。数、式能反映图形准确性,图形能增强数、式的直观性。我国著名数学家华罗庚曾说:“数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞;数缺形时少直观,形少数时难入微;数形结合百般好,割裂分家万事非,切莫忘,几何代数统一体,永远联系,切莫分离。”

研究函数,我们主要研究函数的“两域三性”。函数的两域——定义域和值域,三性——单调性、奇偶性和对称周期性是高考考查的重点,熟练掌握并能运用函数的“两域三性”可以快速判定函数的大致图像,进而通过函数图像继续研究函数的其它性质。

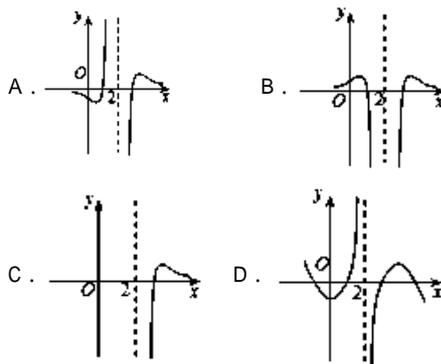
(一) 根据函数的“两域三性”判定大致图像

例1 与函数 $f(x) = \frac{\sin(2x) + x}{x^2}$ 的部分图象最符合的是 ()



解析:易知函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,所以迅速排除 A; 又因为函数的定义域关于原点对称且 $f(-x) = -f(x)$ 对定义域内任意 x 恒成立,所以 $f(x)$ 是奇函数,故 $f(x)$ 的图像关于原点对称,又可以排除 C;同时因为 $\sin(2x) \in [-1,1]$,所以当 $x > 1$ 时, $x + \sin(2x) > 0$ 恒成立,从而可知当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立,故选 B.

例2 函数 $f(x) = \frac{\lg(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^3}$ 的部分图象大致为 ()



解析:因为 $f(x) = \frac{\lg(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^3} = \frac{\lg(x-2)^2}{(x-2)^3}$,易知函

数的定义域为 $\{x|x \neq 2\}$,所以迅速排除 C;又令 $t = x - 2$,

因为 $x \neq 2$,故 $t \neq 0$,此时 $y = \frac{\lg t^2}{t^3}$,不妨设

$g(x) = \frac{\lg x^2}{x^3}$,易知 $g(x)$ 为奇函数,图像关于原点对称.又因

为 $f(x) = \frac{\lg(x-2)^2}{(x-2)^3}$ 可由 $g(x) = \frac{\lg x^2}{x^3}$ 向右平移两个单位得

到,从而可知 $f(x)$ 的图像关于点 $(2,0)$ 对称,所以排除 B;

又当 $x > 3$ 时, $\lg(x-2)^2 > 0$ 恒成立, $(x-2)^3 > 0$ 也恒成立,所以当 $x > 3$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立,所以选 A.

由此可见,判定函数的大致图像大都以选择题形式为主,我们一般先根据函数的定义域和奇偶性进行排除,再由单调性或值域确定函数的大致图像,必要时还需采用换元、平移、对称、渐近线、周期性等方法进一步判定。

(二) 根据图像研究函数性质

$$f(x) = \frac{1}{|x|-1}$$

例3 (多选) 形如 $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ 的函数因其图象类似于汉字“囧”,故被称为“囧函数”,则下列说法中正确的是 ().

A. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq \pm 1\}$

B. 函数 $g(x) = f(x) - x^2 + 4$ 有四个零点

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称

D. 当 $x \in (-1,1)$ 时, $f(x)_{\max} = -1$

解析:先求函数的定义域可知 $\{x|x \neq \pm 1\}$,所以 A 正确;同时也可知 $x = \pm 1$ 是函数图像的两条渐近线,又因为函数的定义域关于原点对称且 $f(-x) = f(x)$ 对定义域内任意 x 恒成立,所以 $f(x)$ 是偶函数,故 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称,由此

我们就先考虑 $x \geq 0$ 时函数 $f(x)$ 的图像,当 $x \geq 0$ 时

$f(x) = \frac{1}{x-1}$,很容易将它的图像画出来.同时当 $x < 0$ 时,

只需将 $x > 0$ 时的图像关于 y 轴对称过来就可以了.这样整个函数图像就呈现在我们眼前.根据函数图像我们迅速得出 D

是正确的,而 C 是错误的;对于选择支 B,只需令 $g(x) = 0$,就可得 $f(x) = x^2 - 4$,令 $y_1 = f(x)$, $y_2 = x^2 - 4$,如图 1,可得到两图像有四个交点,故答案应选 ABD.

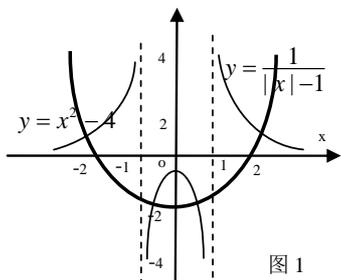


图 1

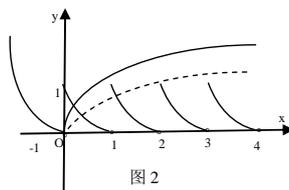


图 2

由此可见,通过探究函数的图像,能直观地反映函数的性质,包括函数的零点、最值、对称等问题,甚至还可以解决不等式、方程以及含参数等问题,我们可以尝试练习以下两题。

例 4 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x < 0, \\ f(x-1), & x \geq 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - a\sqrt{x}$

有且只有两个不等的零点,则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0,1)$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ C. $(1, +\infty)$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

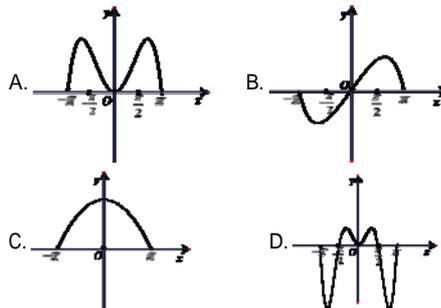
解析:令 $g(x) = 0$ 得 $f(x) = a\sqrt{x}$, 令 $y_1 = f(x)$, $y_2 = h(x) = a\sqrt{x}$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^{-x} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 1$, 先可以画出 $x < 0$ 时 $f(x)$ 的图像;当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = f(x-1)$ 故 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上具有周期性且 $T = 1$. 又 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上具有周期性且 $T = 1$. 又 $x \in [0, 1)$ 时, $x-1 \in [-1, 0)$, 所以 $f(x) = f(x-1) = 2^{-(x-1)} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$, 再利用 $T = 1$ 画出 $f(x)$ 的图像如图所示,在同一直角坐标系中,画出 $h(x) = a\sqrt{x} = ax^{\frac{1}{2}}$ 的图像,由图 2 可知, $a \leq 0$ 时不符合题意,要使 $f(x)$ 与 $h(x) = ax^{\frac{1}{2}}$ 的图像有两个不同的交点,则需 $a > 0$, 且 $h(1) \leq 1$, 且 $h(2) > 1$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq 1$. 故选 B.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} (x \in \mathbb{R})$$

1.(多选)某同学在研究函数 $f(x) = \frac{x}{1+|x|} (x \in \mathbb{R})$ 时,给出下面几个结论中正确的有 (BC)

- A. $f(x)$ 的图像关于点 $(-1, 1)$ 对称
 B. 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 C. $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$
 D. 函数 $g(x) = f(x) - x$ 有三个零点

2.函数 $y = (2^x - 2^{-x})\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 (A)



在初中阶段,我们从两个相互依赖的“变量”认识函数,到了高中,我们在集合概念的基础上,从“对应”的角度对函数的概念有了更清楚的认识,并先后学习了幂指对函数、三角函数等基本初等函数,也逐渐掌握了研究函数的一般方法,体会到数形结合思想的百般好处。

(上接第 319 页)

笔者针对创编练习给出了三个参照。第一,围绕主音上行四音列、五音列的旋律(如音组 1、2、5、6);第二,围绕着属音上行四音列的旋律(如音组 3、7);第三,导音跳进引入的旋律(如音组 4)。要求学生依然按照每人一组的方式轮流演唱,遵照循序渐进的原则,先要求学生演唱指定的节奏型组合,从以上三个参照中任选一种做练习;再要求学生将其中两项参照组合起来,最后做到自由组合节奏,自由组合音列。在 C 大调上演唱过后,再将自由创编的旋律移至不同的调上练习。

在调性音组训练基础上进行的创编练习,学生们明显对于调式的感受更加清晰明确了,可以快速准确的辨认调性,没有再出现创编过程中的调性偏离问题。但也暴露出了旋律偏向“音阶”化,相对生硬的问题。

因此笔者将以上两种方法做了结合,在调性音阶练习的基础上,加入调性和弦的概念。

1. 按照调性音阶的创编练习进行每人两小节的自由编创;
2. 将两小节的练习扩充至四小节。这时,要明确结构的概念,规定学生从主音开始,在两小节处半终止(落在属音上),四小节处全终止(落在主音上);

3. 讲解主音上行四音列、五音列与主和弦的关系,属音上行四音列、导音引入与属和弦的关系,要求学生在 1、4 小节使用主和弦音列,2、3 小节使用属和弦音列,同时第二小节落在属音,结束落在主音;

4. 熟练掌握主、属和弦的关系后,引入下属和弦,规定其出现在主、属之间(共两拍,第一小节后两拍或第二小节前两拍),采用分解和弦的形式(不加任何和弦外音);

5. 在下属和弦的和弦音跳进间加入经过音,或同音间加入辅助音,丰富旋律线条。

在这个练习中,学生可以较明确的掌握调性和弦之间的基本连接关系,和弦与结构之间的关系,准确的把握调性,创编的思路也有迹可循。后续教师可以再依据实际情况不断丰富和弦、调性及节拍的类型,完成学习目标。

笔者在教学实践中发现,学生通过创编练习掌握的学习要点,比让其通过重复练习、背诵等方式掌握的牢固的多。因为在创编也就是应用的过程中,学生会切实的遇到问题和难点,而发现及解决问题的过程,就是最好的知识内化过程。因此,音乐创编练习在视唱练耳课中的运用,不应仅局限于作曲专业的学生,对于所有的音乐专业或准备从事音乐专业的学生,都是重要且必要的。