几何画板在高等数学教学中的应用研究

王练　曾方青

（湖南科技学院理学院　湖南永州　425199）

摘要：高等数学由于较强的抽象性，导致学生在学习中存在较大困难，如何能将抽象转化为具体是一个亟待解决的问题。研究利用几何画板进行高等数学的教学，发现几何画板可以将教学内容直观化，抽象问题具体化，复杂问题简单化，能在具体的实例中发现数学问题的规律和变化。

关键词：高等数学；几何画板；教学

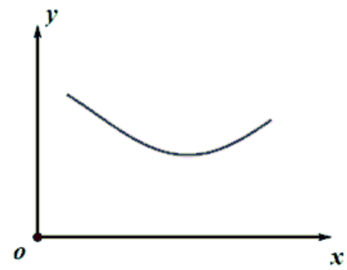
一、问题提出

高等数学作为理工科专业基础课，是理工科学生在大一年级必须要学习的一门功课，高等数学内容是以高中数学内容为基础，进一步向数学严谨性发展的科目。内容占比较大的函数内容，由函数的微分和积分贯穿整个数学内容。学生在学习过程中存在困难的地方在于高等数学抽象性和较强的严谨性，导致学生无法在直观认识数学内容的实际面貌，产生了畏难情绪，进而对高等数学学习失去了信心。因此，在高等数学考试成绩中，挂科率一直是所有科目比例较高的。如何将教学过程简化，让学生更容易接受所学内容，并能有效学习成为高等数学教学亟待解决的一个实际问题。纵观高等数学的教学研究主要集中在学生的学习情况和教师的教学手段等两个方面，佟珊珊等在《高等数学教学效果优化策略研究》中指出，高等数学教学存在学生对高等数学的认知不足，传统的教学方式存在相应的局限性。并且阐述了融入数学历史内容，结合问题驱动教学模式，有效利用思维导图及注重理论与实际相结合优化高等数学教学。乔剑敏在《案例教学在高等数学教学中的应用研究》中也指出大一年级学生对于高等数学的学习兴趣不高，学习动力不足。强调了将高等数学内容形象化有助于学生的学习。

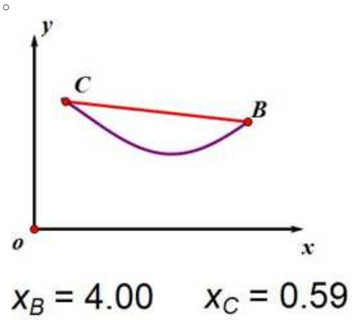
如何让学生从直观上认识数学知识的实际面貌成为了高校数学教师需要解决的问题，主要解决的问题为：如何能将复杂问题简单化，抽象问题直观化。对此，可以利用教学软件的功能直观演示高等数学定理、公式的形成过程或者是从直观上理解定义和公式，让学生在直观上认识抽象的内容。进而消除对高等数学学习的畏惧心理，进一步提升学生学习高等数学的信心。因此，有必要引入教学软件将高等数学内容直观展示给学生，让学生从直观层面上认识高等数学内容，进一步抽象出高等数学内容的实际图像和图形，让学生明确高等数学知识也是可以通过软件操作确认的，通过理解和分析，能够在最近发展区上认识高等数学内容，提升高等数学学习自信心，也为学生自主探索高等数学内容提供方式方法。

二、几何画板在函数凹凸性教学中的应用

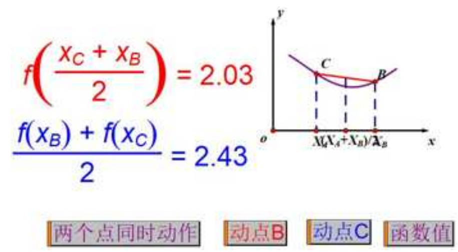
函数的内容贯穿于整个高等数学学习的过程，主要特点是性质较多，抽象性较一般数学内容来说相对较高，要想理解和掌握高等数学的知识，函数内容是必须学习和掌握的基本内容，如函数的单调性、对称性、奇偶性周期性都是高等数学内容要求的基本内容。但是通过学习要使能够画出一些相应函数的图像并且发现的基本性质，函数的凹凸又是不可或缺的一个数学内容，函数的凹凸是继函数的高阶导数之后的又一函数性质，它是研究函数图像的基础，也是函数高阶导数的应用，是学生必须掌握的内容。但是函数的凹凸性对学生来说不容易理解，因为不是所有的函数学生都能通过函数的对称性、奇偶性以及周期性画出具体图像。对此，可以运用几何板画出具体图像来利用数据让学生直观观察函数基本性质，进一步得出相关的判断方式。在教学中可以进行如下的教学过程：



首先给出一个函数在某个区间上的图像，让学生直观观察图像的特点，发现即有单调递增也有单调递减的部分，并且整个图像是凹（或下凸）的，直观印象上认识凹函数。在此过程中，可以让学生从心理层意识到函数的性质可以通过观察得到，那么说明这个内容是实际存在的，进而更容易接受函数凹性的存在，对函数凹性的学习产生兴趣。



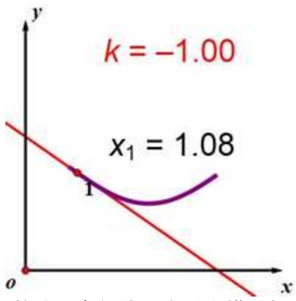
再在图像取两点并标出横坐标，将这两点用线段连接起来，可以直观发现，整个图像在线段 BC 的下方，进一步移动点 B 或者是点 C 以及同时运动 B、C 两点，发现，在 B、C 区间内，函数图像总是处于线段 BC 的下方。在此过程中，学生通过观察动态演示过程能够自主发现图像中的相关因素及其变化趋势，不在拘泥于表面认识，而是对知识有了进一步的理解，并且可以根据动态直观自主描述变化过程中，函数的图像与线段的位置关系，这几乎是初、高学习数学知识的方式，学生更容易接受。



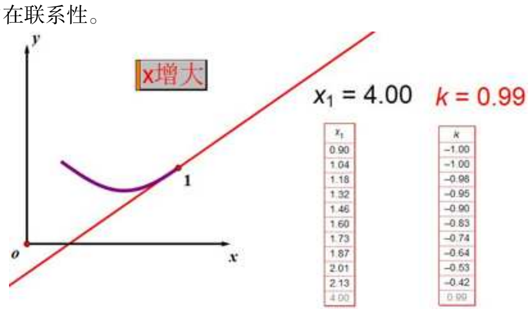
进一步计算函数在 B、C 两点的函数值之和的一半与 B、C 两点中点的纵坐标，可以直观观察函数的大小，发现 B、C 两点的函数值之和的一半总是大于 B、C 两点中点的纵坐标，从而得出凹函数的定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对于 I 上的任意点 x_1, x_2 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$ 在区间

I 上的图像是凹的。在此过程中，可以学生通过数据直观的变化发现，函数的凹性可以用现实的数据表达出来，让学生在最近发展区上意识到函数凹性的合理性，并能数据的对比，直接发现函数凹性可以用数据加以描述，不再是抽象的函数表达式，而是具有可操作性的，可以通过图像进行判断。

再提出问题：是否所有的函数凹性都采用这种方式进行描述呢？显然，如果每一次都运用函数值的大小和函数图像来判断函数的凹性是比较困难，因为一些比较复杂函数，学生不能直接画出图像，也就不能直观的观察出函数值的大小，并且由于函数的凹性是一种局部性质，可能需要在多个区间上进行分析和讨论，运用定义解决问题显得尤为困难和复杂。因此，运用定义解决问题不能很好的完成函数凹性的判断，再次进行演示分析，得出函数在区间凹性的判断方法。



在此凹区间上构造一条切线，度量出横坐标和切线斜率，可以让学生直观感受函数凹性和切线斜率的关系，通过分析会发现其中的内在联系性。



制作操作类按钮运动点 x_1，从数据可以直观看出随着 x_1 的增大，切线斜率也随之增大，进而根据切线斜率的意义得出可以用二阶导函数判断函数的凹性。即：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，当 $f(x)$ 在区间 (a,b) 有 $f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是凹的。

三、研究结论

3.1 抽象内容具体化

对于一些抽象性的高等数学内容而言，由于各个变量运动变化的过程比较复杂，学生很难想象出它的变化过程。想象力较弱的学生学习和理解它显得尤为吃力，他们只是对一些特殊的情况比较熟悉，无法完全想象出整个变化过程，如果一味采用传统的教学方式，会让学学习起来较为困难。而几何画板的动态演示功能，可以根据实际问题画出理想的模型，让学生直观感知抽象的高等数学知识的实际图像，并且一个模型可以通过改变得到，可以做到让学生全面了解数学知识。如果只是让学生进行想象和作图，大部分学生只能作出一些较为简单或者之前已经学过的图象，只能从表面理解高等数学知识的含义，不能从本质上认识数学知识的本质内涵，对数学知识的掌握处于一知半解状态。而教师如果采用传统的直尺画图，不但花费的时间较多，而且画出的图形也不一定精确，会使学生的学习参照存在缺陷，不利于学生的学习。通过使用几何画板作的图象，可以直接改变的图像或者是图形的值，观察图象的变化，将抽象的内容具体化，既解决教师直尺画图耗时多的问题，又减少非必要环节，对学生的精力消耗也会相应减少。

3.2 教学内容直观化

学生在学习过程中对于涉及理论推理的数学内容，常常因为思维定势与理论之间的逻辑关系存在偏差，导致对理论证明过程中因果关系的理解较为混乱，容易出现前后颠倒的情况。几何画板具有强大的画图功能，可以将教学内容直观地展示在学生面前，再由学生直观观察，发现图像、图形的变化趋势，在观察过程中掌握高等数学知识。大一年级的学生只是对中学数学知识有一定的认识，但是都处于数值运算，简单的证明问题，对于较为复杂的函数内容和图形内容存在认识缺陷，推理论证能力能力较弱。即使认认真真听完教师在课堂中所讲的高等数学内容，也不一定能完全理解，但如果有直观操作的软件，让学生发现数学知识的发生和发展过程，必使学生教学内容产生兴趣。这就需要将教授的数学内容直观地展现在学生眼前，由学生直观观察该内容的本质属性，进而认识识的全貌。如探究函数凹性的判断方法，如果采用 ppt 播放的方式讲解，学生值能从几次特殊的位置感受，不利于学生直观感知整个变化过程，并且教师只是简单重复了同一个相同的过程，学生只看到特殊的位置，也有部分学生不认可。若通过几何画板画来画出函数的凹区间，可以应用度量功能把该函数的所有凹区间完全演示出来。直观的数据最能让人信服，学生认可函数的凹性的形成过程，则学生学习函数的凸性过程也就水到渠成。在定义的探索和定理证明过程中学生可以参照现实的图像和图形积极参与思考，从而使学生在以后学习高等该类知识时将得心应手，信手拈来。

3.3 复杂问题简单化

对于大一学生而言，复杂的问题实际上就是综合应用型问题，它是由多个模块的知识点融合在一起考察。学生在分析解决过程当中，无法在短暂的时间内将这些知识点的关系列举出来，也即是说学生无法厘清这些知识点的关系，导致思维混乱。利用几何画板可以直接观察到这些知识点的内在关系，将复杂问题层层分开，分解成一个个简单的问题。学生通过解决简单的问题，重新组织解答问题的过程，进一步解决问题。如上文探究一个函数的凸性问题，几何画板能将它的整个形成过程清楚展示出来。通过演示可以发现，函数凸性的形成过程，首先是函数本省存在这一特性，通过这一特性分析和解决实际的数学问题，可以使得在学习画一个函数的图像时，有迹可循，不再是随机的找几个数据拼成想要的结果，通过问题的解决也增强学生的学习信心。

参考文献：

[1]夏莉,高天玲.“高等数学”教学改革探讨[J].教育教学论坛,2021(43):38−41.

[2]张晓飞,王书敏,李永杰.高等数学教学改革的新视角探析[J].河南教育(高等教育),2021(09):54−56.

[3]乔剑敏,李沃源,张军,马生昀.案例教学在高等数学教学中的应用研究[J].高等数学研究,2021,24(04):109−112.

[4]符一平.论数学竞赛对高等数学教学改革的意义与作用[J].当代教育实践与教学研究,2020(08):61−62.DOI:10.16534/j.cnki.cn13−9000/g.2020.0877.

[5]张登华,岳红英,高钦.混合式教学在高等数学教学改革中的应用[J].教育教学论坛,2020(13):272−273.

王练（1990.2−），男，贵州习水人，硕士，讲师，研究方向：数学教育

曾方青(1993.9－)，女，湖南永州人，硕士，讲师，研究方向:偏微分方程数值解。

基金项目：湖南科技学院教学改革研究项目（高等数学教学直观化研究 XKYJ2019016）

基金项目：湖南科技学院教学改革研究项目（《高等数学》线上线下混合式教学实践与研究 XKYJ2020021）