弹塑性接触问题的非光滑非线性方程组方法分析

齐丽岩

（大连海洋大学信息工程学院　辽宁大连　116023）

摘要：将非光滑非线性方程组方法应用到弹塑性接触问题的处理中，在具体的处理操作中会将非光滑非线性方程组方法和求解弹塑性问题常用的迭代方法结合在一起，另外一种是将问题写成一个统一的非光滑非线性方程组，在这个方程组中直接计算求解。

关键词：非光滑非线性方程组方法；弹塑性接触方法；迭代方式

在小变形、小应变假设作用下，三维静力弹性塑性摩擦接触问题的求解方式分为两种，一种是试验和误差的迭代方式，一种是规划分析方法。第一种方法是使用乘子方法来将接触约束条件引入到系统的总泛函中，之后根据变分原理获得系统的平衡方程。在迭代分析的时候会牵扯到材料的非线性和接触条件的两个迭代分析方式。材料的非线性迭代会使用 NR 分析方法，接触条件的迭代方式是搜索接触状态的构成。两种迭代方式使用顺序不固定，有的算法会将材料的非线性迭代嵌套到接触迭代中；有的是两个迭代方式同时应用。规划方法的计算方式主要是将 3D—SEPFCP 转变为数学规划问题来进行求解。在综合这两种方式优点的基础上打造出了非光滑非线性方程组，现就非光滑非线性方程组在弹塑性接触问题的解决应用中进行分析。

一、接触系统的基本描述分析

（一）局部坐标体系的接触约束条件

假设质点出现了小规模的变形、小规模的应变，接触面是顺滑面，接触体系局部坐标体系下的接触约束条件确定会牵扯以下几个内容：①作用力和反作用力。局部坐标体中法向定义=-局部坐标系受压为正时的坐标数值。②法向应力为压应力和法向非嵌入条件。在脱开状态的时候，局部坐标体系中 数值为 0。粘着和滑动状态时的局部坐标体系数值超过 0。

（二）弹塑性材料本构关系、屈服函数

弹塑性材料服从 Mises 屈服规则、相关联流动法则、硬化规律为线性等向硬化，硬化参数使用等效塑性应变。在公式中，D 代表的是弹性矩阵、弹塑性矩阵，$d\sigma$、$d\varepsilon$代表的是应力增加变量、应变增量。F 代表的是屈服函数，J2 代表的是偏应力张量的第二不变量。H 代表的是硬化系数。

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}^{p}d\varepsilon \text{或者 } d\sigma_{ij}=D_{ijkl}^{p}\left(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon_{kl}^{p}\right)$$

$$F=f(\sigma,\ \dot{\varepsilon})=\sqrt{3J2}-(\sigma r+H\dot{\varepsilon})\leq 0$$

二、弹塑性接触系统的虚功方程和有限元离散形式

在使用有限元对虚功方程离散化分析之后可以获得系统的平衡方程，按照公式后的不同表示方法能够得到增量平衡方程的两个不同形式，即 $Kidu=dR+dP$　$K^{els}du=\varnothing d\gamma+dR+dP$，在这个公式中，Ki、du、dR、dP 分别代表当前荷载增量步的切线刚度阵、节点位移增量、外荷载增量和接触力增量。 K^{els} 代表的是结构弹性刚度阵，$\varnothing$是塑性势阵，$d\gamma$代表的是高斯点塑性乘子增量。

三、NNEQM 和 N-R 迭代方法结合在一起求解 3D-SEPFCP

（一）3D-SEPFCP 非光滑非线性方程组模型

在经过有限元离散分析之后对每个接触点对、接触约束条件表达式被写成以节点变量表示的非光滑非线性方程组的形式。在这个公式中 i 代表的是可能接触点对号，NC 代表的是可能接触点对的总数。

$Hi=\min(P_{n},\ \triangle Un)=0$

$H2=\triangle dur+\min(o,\ u\max(o,\ Pni-\triangle un)+Pri-\triangle dur)+\min a(o,\ Pni-\triangle un)=0$

$H3=\triangle duasin\theta-\triangle dubcos\theta=0$

在公式中，Pn、Pr 都是未知量，△du 是未知量函数，整个函数的设定能够充分满足系统平衡方程。

（二）求解步骤

对 3D-SEPFCP 的求解包含对平衡方程、非光滑方程组求解分析，平衡方程使用 N-R 方法进行求解，在计算方程组的时候，定义非光滑非线性方程组 H 和效益函数 g。$H=(Pn、Pr、\theta)=(h1,\ldots\ldots h1^{NC},\ H2\ldots\ldots h2^{NC})'$，将计算结果用来解决无约束规划问题。

使用基于广义导数的非光滑阻尼牛顿分析方法来对上文描述的无约束规划问题进行分析，在经过分析之后获得方程组的数值。在对方程组求解的过程中将非光滑方程的迭代求解过程嵌套在平衡方程的迭代求解分析中，假设第 i 个荷载步的结果已经获得，在第 i+1 荷载步骤计算中我们发现所有的变量都是相对于第 i+1 荷载增量步的。总体迭代步数可以使用 m 来表示，在 m=0 的时候，不平衡力对应的分别是第 i 荷载步结束时切线刚度矩阵、位移、应变、应力变化。

第一，在 m=m+1 的时候,按照公式分析计算获得基础柔度阵。第二，利用非光滑阻尼牛顿方法来计算出方程数值，迭代步数使用 k 表示出来，在 k=0 的时候，和接触相关的变量需要在其右上标的位置上增加一个变量 k。第三，将一些子数值转变到整体坐标体系下，得到 dp^{m}的不平衡力。第四，将总位移、总应力、总应变的数值计算出来，如何不平衡力量的模小于β，这个时候，接触条件、屈服条件、平衡方程满足规范的要求，在数据参数满足规范需求基础上进行下一荷载的计算，不然计算 $K1^{m}$会转移到第一个步骤上。

四、求解 3D-SEPFCP 的完全非光滑非线性方程组方法

将屈服条件和接触条件组合在一起形成一个完全的非光滑非线性方程组。

$H1=0,\ h2=0,\ h3=0$

$H4=\min[-f^{i},\ d\gamma]=0$　$(i=1/2\ldots NC)(j=1/2\ldots NumGausP)$

在所有公式中，h1-h3 和变量含义和上文公式提到的信息相同，NumGausP 代表的是结构中所有高斯点的个数，方程组的阶数为 NumGauP+3xNC，Pn、Pr 都是未知量，f 和 du 被看做是未知量的函数，du 需要满足总体平衡方程需要。3D-SEPFCP 可的求解方式和设定好的方程求解方法十分类似，但是在未知数中又增加了一个参数，接触柔度阵根据 K^{elas}进行计算，在计算求解的时候需要计算出 du 和 f 对未知量的导数。

五、数值算例分析

两个悬臂梁的左右两端会叠合在一切，每个梁都会被离散成 40 个边长都是 0.2m 的三维八个节点的块体单元,材料参数和两根梁的基本材料参数是一样的，材料的密度为每立方米 2400Kg，弹性模量为 2e10pa，泊松比为 0.17。材料最开始的屈服强度为 5e05,pa，材料的硬化系数为 2e10Pa，接触面的摩擦系数为 0.5 荷载。在梁 2 的顶

面沿着 x、y、z 的方向做出荷载 le5Pa。–Le5Pa、O、5e5Pa，荷载分 15 级加载，从 第二个荷载的增量步开始，有高斯点进入到塑性状态。梁两端部分接触点位移和接触力情况如表一所示。梁两端部分接触点位移基本情况对照情况如表二所示。梁自由端位置上部分节点位移情况如表三所示。

表一：梁两端部分接触点接触力基本情况对照表

接触点对	方法	接触状态	局部坐标下的接触力（N）		
			法向 n	切向 a	切向 b
A	1	滑动	737.5	–267.2	254.1
	2	滑动	737.7	–269.9	251.4
	3	滑动	732.2	–405.3	275.1
B	1	滑动	1589	–641.1	469.6
	2	滑动	1590	–644.1	465.8
	3	滑动	1591	–794.6	487.6
C	1	脱开	0	0	0
	2	脱开	0	0	0
	3	脱开	0	–0.01	0.002
D	1	滑动	5128	–2441	786.1
	2	滑动	5125	–2488	616.6
	3	滑动	4667	–2324	339.3

表二：梁两端部分接触点位移基本情况对照表

接触点对	方法	接触状态	总体坐标系下节点位移（mm）		
			X	Y	Z
A	1	滑动	0.2575（–0.0391）	–1.504（–1.504）	0.5572（0.8388）
	2	滑动	0.2575（–0.0391）	–1.503（–1503）	0.5576（0.8381）
	3	滑动	0.253（–0.0391）	–1.464（–1.464）	0.5877（0.8039）
B	1	滑动	0.1223（–0.2579）	–1.613（–1.613）	0.558（0.839）
	2	滑动	0.1223（–0.2578）	–1.613（–1.613）	0.5582（0.839）
	3	滑动	0.110（–0.245）	–1.575（–1.575）	0.558（0.8384）
C	1	脱开	0.0651（–0.0107）	–0.0297（–0.0134）	0.0392（0.0012）
	2	脱开	0.0651（–0.0107）	–0.0298（–0.0134）	0.0392（0.0012）
	3	脱开	0.0648（–0.0102）	–0.0298（–0.0126）	0.0392（le–05）
D	1	滑动	0.0324（–0.0719）	–0.0488（–0.0488）	0.0083（0.0306）
	2	滑动	0.0323（–0.0718）	–0.0487（–0.0487）	0.0082（0.0308）
	3	滑动	0.0307（–0.070）	–0.0473（–0.0484）	0.0084（0.0300）

（注释：一个接触点对包含两个接触点，括号外的值是梁 1 接触点的位移，括号内的值是梁 2 接触点的位移，接触力的数值为作用在梁 1 上的接触力的数值。在使用 ANSYS 进行计算分析的时候会打造出面–面的接触模型，法向弹簧系数为 15000.在具体实施操作的时候，三种方法分别对应 NNEQM1、NNEQM2、ANSYS）。

表三：梁自由端位置上的部分节点位移

位移/节点号	X 方向			Y 方向			Z 方向		
	NNEQM1	NNEQM1	ANSYS	NMEQM1	NMEQM2	ANSYS	NMEQM1	NMEQM2	ANSYS
E	–0.1418	–0.1417	–0.1336	–1.5033	–1.5029	–1.4636	0.448	0.4489	0.4776
F	0.2760	–0.2759	–0.276	–1.6113	–1.6108	–1.6108	0.449	0.449	0.4776
G	0.3641	0.3639	0.355	–1.5061	–1.5057	–1.4662	0.951	0.9499	0.917
H	0.1425	0.144	0.1446	–1.617	–1.6165	–1.6165	0.951	0.9502	0.917

根据表二结果分析：·NNEQM1 和 NNEQM2 相比,位移相差很小(5%以内,大部分在 1%以内）；ANSYS 结果与这两种相比，位移值偏小，其中 x、y 方向的位移值相差 5%以内，多数在 1%范围以内。ANSYS 结果和这两种结果相比，位移数值偏小，其中，x 和 y 方向的位移数值相差在 5%以内，E、F 点的 Z 的方向位移数值稍微大一些。

结束语

综上所述，方法 NNEQM1 和 NNEQM2 精准度能满足接触约束条件，接触点对应的位置量 Pn、Pr，没有出现人工变量，且解的收敛性表现良好，对 NNEQM2，在荷载步数较少的时候，弹塑性温度的计算精准度不高，因此，在设计时对荷载步的数值需要取得较小一些。在方案 NNEQM2 中，不需要按照高斯点应力状态计算切线刚度阵，也不需要开展添加卸载准则的判断，这种方法和 NNEQM1 是不同的。在方法 NNEQM1 中，当切线刚度阵出现变化的时候，接触柔度阵需重新计算，在方法 NNEQM2 中，每一个荷载步开始增加的时候，塑性势阵需要根据高斯点的应力数值进行计算。这样在接触点对照很多高斯点的时候两个矩阵的计算规模比较大，且在求解非光滑非线性方程组的时候还需要不断计算出一个系数矩阵，矩阵的计算量比较大,其中,在方法 NNEQMI 中系数矩阵的阶数为 3xNC，但是在 NNEQM2 中，系数矩阵的阶数为 3xNC + NumGausP。当前，对 NNEQM2 仅仅作为一种方法进行探索的时候,没有对程序进行合理的优化处理，导致程序计算的精准性较差，效率较低，将其应用到工程计算中存在一定的难度。

参考文献：

[1] 胡志强，陈健云，陈万吉,等. 弹塑性接触问题的非光滑非线性方程组方法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6):7.

[2] 胡志强，樊国刚，陈万吉,等. 非光滑方程组方法在求解非匹配网格接触问题中的应用[J]. 计算力学学报, 2013(1):6.

[3] 陈万吉，胡志强. 三维摩擦接触问题算法精度和收敛性研究[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(5):7.

[4] 王春梅. 简单界约束非光滑方程组的非单调信赖域方法[D]. 苏州大学, 2008.

[5] 杨正豪. 非单调技术与过滤集技术在最优化和非光滑方程组中的应用[D]. 南京师范大学, 2008.

[6] 萨和雅. 非线性方程组的锥模型方法研究[D]. 内蒙古大学, 2017.

[7] 王春梅. 简单界约束非光滑方程组的非单调信赖域方法[J]. 苏州大学学报：自然科学版, 2008, 24(1):5.

[8] 姜晋庆，竺润祥，尚世英. 弹塑性接触问题的分析方法[J]. 光学机械, 1981(06):58–67.

项目名称：非光滑方程组的 Levenberg–Marquardt 算法　项目编号 500220202009