“数字信号处理”课程中傅里叶变换相关知识点的深度剖析

莫燕斌

（玉林师范学院）

摘要：数字信号处理课程是电子信息领域的一门重要的专业必修的基础课程，而该课程中的相关傅里叶变换的知识点较难理解。基于此，本文对其进行深度剖析，以期为学生更好理解该门课程的学习，为后续的实际应用打下坚实的理论基础。

关键词：数字信号处理，傅里叶变换，奇异函数，时域，频域

引言

当下，随着大数据、人工智能以及计算机技术在全球范围内的广泛应用，这使得对于该方面的相关专业技术人员的需求与日俱增。同时，数字信号处理课程作为在电子信息领域的一门重要的专业必修的基础课程，其中所包括的内容在通信、电气、测绘以及计算机专业的进一步学习中都会用到该课程中的相关基础知识。其中，在该课程的学习过程中重要的是要理解数字信号系统的时域和频域分析方法。然而在该课程的学习过程中，傅里叶变换的相关知识点（如连续或离散信号的傅里叶变换、离散傅里叶级数及离散傅里叶变换）较多且容易混淆，因此有必要对傅里叶变换的相关知识点进行深度剖析，探讨傅里叶变换后面的本质，以便于让学生在学习过程中能够轻松的理解与掌握。

1. 傅里叶变换基本概念简介

一般来说，“傅里叶变换” 是一种广义的说法。换句话说，不论是“傅里叶变换（FT)，或者是 “傅里叶级数(FS)”，这些均被称为称 “傅里叶变换”[1]。总的来说，傅里叶变换在时域上其横坐标代表时间信号从连续到离散，可通过采样来完成两者的变换。而纵坐标则反映了周期信号到非周期信号的转变，而这种转换也将周期趋向于无穷大。同样的，在傅里叶转换的频域上也存在类似的关系。但是，在该过程中需要注意的是在坐标定义与方向上来说，时域与频域是不同的。若从时域角度上的连续性与周期性看待信号，可以将其归类为连续非周期性的信号、连续周期性信号、离散周期性信号及离散非周期性信号。对于上述连续的信号，其时域的分析重点是对微分方程进行求解，包括频域分析法及 S 域分析法[2]。而针对离散的信号系统，对其时域的分析重点为计算差分方程，其相应的域分析主要包含频域分析及域分析法[3]。

具体地，对于傅里叶变换的理解可以分为两个方面。第一，由图 1a 可知，傅里叶的四种变换（即连续时间傅里叶变换 CTFT/离散时间傅里叶变换 DTFT/连续时间傅里叶级数 CTFS/离散时间傅里叶级数 DTFS）的相互之间各种的变换均是由左边的时域开始到右边的频域结束，在该转换过程中时域与频域之间充当了纽带的效果。再从频域到时域之间的转换来看，其相互的转换过程也是相互依赖，对应于傅里叶变换的各种逆变换。图 1b 为周期/离散–非周期/连续关系图。由图可以看出一个离散的域将对应另外一个周期性拓展的域。这也就是所谓的时域采样定理，即频域上的周期性延伸对应于时域采样的过程。亦可从以下几点理解：首先，在时域上面的采样(离散)是其频域上相对应的周期性拓展，也就是 DTFT 与 DTFS 的周期序列，这二者在频域上面表现为周期特点。其次，在时域上面的连续性是其相对应频域的非周期性，也就是 CTFT 的非周期信号与 CTFS 的周期信号。再次，在时域上面的周期是其对应频域上面的采样过程，而在频域上面对其进行采样过程赋值就是傅里叶级数，也就是 CTFS 周期信号与 DTFS 的周期序列。最后，在时域上面的非周期性是其频域上面的连续性，而在此过程中的对于频域的连续的赋值就是傅里叶变换，也就是 CTFT 非周期信号与 DTFT 序列信号。

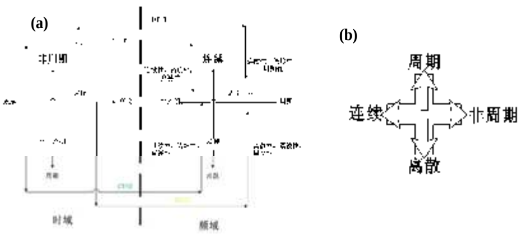

图 1 a. 四种傅里叶变换图；b.周期/离散–非周期/连续关系图

1.1 连续非周期信号的傅里叶变换

在非周期的傅里叶信号的变换中，主要分为连续非周期的傅里叶变换、离散型的傅里叶变换以及序列的傅里叶变换。从时域上将连续非周期的信号给予等间距的采样，可以得到序列，而后对于该序列进行阶段可以得出有一定长度的序列，其长度定义为 M。连续的非周期信号的变换可以用积分来完成，在这其中存在连续变化的量，即模拟角频率与时间。利用时域的采样可以让时间进行离散化。如果连续非周期性信号为带限的信号，满足 $f_s \geq 2f_c$ 时，综合 $t=nT_s$ 以及 $\omega=\Omega T_s$，能够利用连续信号时的非周期性傅里叶转换推出序列的傅里叶转换的正转换公式 （如图 2）。此外，如果对连续的非周期性信号采取等间距的采样，对其相对的频域进行以Ω的周期进行周期上的推展，并且综合上述的 t 及 ω 的相关公式，又能够利用傅里叶转换的逆变换公式推出相应序列的傅里叶逆转换公式。由序列傅里叶转换公式可知，其中存在变量数字域的频率，因而还要在此基础上对其进行积分进一步得到序列的傅里叶逆变换公式。进一步的，如果将一个周期内的（0~2π）数字域频率ω进行等间距的 N 个点采样，将其离散化，又能够在此基础上得出有限长序列的离散型傅里叶变换。

图 2 连续非周期信号间的傅里叶变换

1.2 连续周期信号的傅里叶级数（FS）

在连续的周期性信号中，其傅里叶级数可以分成连续周期信号与序列信号的傅里叶级数。在时域上对其信号进行等间距的采样就可以获得最终的周期的序列傅里叶级数。而在连续的周期信号的傅里叶级数的表述中，其中的变量为时间，a_k 为离散数值，k 的取值范围限定在（−∞，+∞）。如果在连续的周期内等间隔取 N 个采样点，那么序列的傅里叶级数的周期就为 N，k 次的谐波频率就为 2πk/N。此外，在连续的周期信号的傅里叶变换中，其相应的级数为一个无穷级数，在对于其相应的换算过程中要考虑其收敛性的问题。而针对周期性的序列傅里叶变换而言，其级数为有限项，因而

也就不需要考虑其收敛性的问题。

连续的周期信号不能达到绝对可以积分的条件，因此其也就没有傅里叶转换。但是可以考虑其傅里叶级数的展开，图 3 以指数函数的方式对于傅里叶级数进行了说明。

$$X(jk\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\Omega t}dt \longrightarrow X(jk\Omega)=\frac{\sin(k\Omega)}{2k\Omega}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega)e^{jk\Omega t}$$

图 3 连续非周期信号指数函数傅里叶级数

2. 关于傅里叶变换在 “ 数字信号处理” 中理解

1.2 “数字信号处理”中关于 FFT 与 DFT 变换关系理解

在“数字信号处理”的课程的相关的知识点中存在两种经常使用的傅里叶变换，即 DFT 与 FFT。不管从频域的角度看还是从时域的角度来说，利用 DFT 与 FFT 进行信号的处理均为离散的信号而且其长度也是有限制的。因而这也就造成了必须要采用计算机或者是 DSP 来对其进行直接的解决。在此过程中，需要特别注意的是 FFT 仅仅能被看作是一种加速版的 DFT，从本质上来说其不是一种新的傅里叶变换模式。在对模拟信号经由 A/D 转换离散化，并进行截断处理，就能将时域信号转换成时域离散信号，然而从频域看该信号依旧为连续周期性质的 DTFT，计算机处理该类信号的 DSP 不能对其进行直接处理。因此要利用“三横两纵”的关系来解决这一问题。

详细的来说，“三横两纵”中的“三横”代表的是 3 种傅里叶变换的关系，包括 DTFT/DFS/SFT 这三者之间的相互转换。在此时的变换过程中，依旧可以利用上述观点来进行理解，即首先时域与频域之间的纽带是傅里叶变换的重要作用。其次，一个离散的域是其另一个域在周期方向上的延展。同时，这也能够理解 TFT/DFS/SFT 这三者之间的相互转换的过程中 DFT 的周期性的隐藏问题。“两纵”可以理解为对信号的时域以及频域进行同时的傅里叶变换操作。在时域上，进行周期延展到均匀采样再到给主值进行序列的一系列相关的操作。此外，还要对信号进行相关的 DFT 转换，由时域的 N 点样本的序列为起始点，最后到达频域 N 点样本的序列。

2.2 “数字信号处理”中连续信号的 FT 与 FS 变换关系理解

在“数字信号处理”中，对于连续信号的处理经常会有 FS（傅里叶级数）与 FT（傅里叶变换）之间的相互转换关系。基于上述对于连续信号的阐述可知，连续的周期性信号能够在一定程度上将其展开变成傅里叶的级数，然而在此过程中却是不存在相对应的傅里叶变换。如何更进一步的理解这一概念，就需要将周期性的信号与非周期性的信号统一起来进行研究。同时要引入另一个奇异函数来说明这一问题。在以引入奇异函数的基础上，就可以对周期性信号进行相对应的傅里叶分析及变换，也就是所谓的广义形式上的傅里叶变换。根据 FS 可以知道，在 FS 的基础上将基波的角频率表示成 ω。如图 4 所示，对其进行相关的傅里叶变换，同时采用奇异函数 d_∞进行表述，而其相应的周期函数也能用傅里叶进行变换[4]。变换过程中，其相应的频域与傅里叶级数的系数相一致，仅仅是用冲击函数来表达频域的分量。此外，从周期函数的频域或者是傅里叶级数的对应系数也可以得到周期函数频域是对其非周期信号频域的抽样赋值。将抽样时间间隔定义为基波角频率 2π ωT。同时，频域的抽样也有可能造成其信号在时域上面的延展。将延展周期定义为 T，利用下式就可以把非周期的信号调整为周期性的信号，也就是完成了相对应的连续信号的周期性 FS 与非周期性 FT 之间的傅里叶的相互转变。

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$FT[x(t)]=FT[\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}]=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)\sigma(\Omega-k\Omega_0)$$

图 4 FT 与 FS 变换关系

2.3 “数字信号处理”中离散信号的 FT 与 DFS 变换关系理解

除了上述的连续信号外，在“数字信号处理”中离散信号也是经常遇见的一种信号类型。相较于连续信号的相互转换，对于离散信号的傅里叶转换较为简单，具体来说也就是 FT（傅里叶变换）与 DFS（离散傅里叶级数）之间的相互转换。在离散信号的傅里叶转换过程中，同样的可以将其展开变为傅里叶级数，但在这一过程中其相对应的傅里叶变换则又是不存在的。要想进一步理解这一问题，也要像对于连续信号的处理一样引入一个奇异函数 d_∞。在此基础上就可以将离散信号中的周期性序列以及非周期性的序列分析相结合起来看。如图 5 所示，由图可知，对于离散信号的 DFS 进行傅里叶变换，从其相应的周期序列的频域谱或者傅里叶级数可以看出，其周期性的序列频域是可以将其看成是在其连续谱的频域的非周期的序列上进行相对应频域的抽样。在此过程中，规定在每一个周期（2π）中抽取 N 个点，同时其抽样的间隔距离设置为 2π/N，也就是频域中基波角的频率。同时，抽样过程中的频域将导致信号在时域周期内的延伸，具体延展周期定义为 N。这就使得非周期的序列成为了周期性的序列，也就是完成了离散信号的 DFS 与 FT 之间的相互变换关系。

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$FT[x(n)]=FT[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

图 5 FT 与 DFS 变换关系

3. “数字信号处理”中各种傅里叶变换关系总结

综上分析，对于“数字信号处理”中各类信号所对应的傅里叶转换的关系进行总结，如图 6 所示。

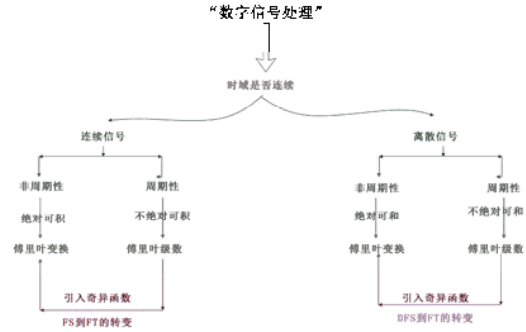

图 6 “数字信号处理”中各种傅里叶变换关系总结

4. 结语

本文针对“数字信号处理”课程中较难理解的傅里叶转换进行了深度的剖析。首先对其基本的知识概念进行了梳理，而后对其连续信号以及离散信号的相关傅里叶变换进行详细的分析，指出其奇异函数的引入是各种转换进行的必要条件，最后对于傅里叶的各种转换关系进行总结，以便于学生在总体上掌握其要领。

参考文献：

[1] 姜恩华，杨一军，窦德召,等. 数字信号处理课程中的傅里叶变换教学探索[J]. 廊坊师范学院学报：自然科学版, 2017, 17(1):5.

[2] 顾光旭. 连续系统几种分析方法的简单讲解[J]. 考试周刊, 2010(47):2.

[3] 方士军. 基于小波理论的提高测井曲线分辨率方法研究[D]. 哈尔滨工程大学.

[4] 楼建华，李晓波，毕成良. 关于周期函数的傅里叶级数的一个注记[J]. Math Practice Theory, 2003, 033(006):105−107.

基金项目：2011 年校级教育教学改革工程专项项目(大学生创新实践基地育人模式的研究与探索)，项目编号：2011ZXJG26

作者单位：玉林师范学院

作者简介：姓名：莫燕斌，出生年月：1980.11.26，男，广西玉林人，汉族，本科学士，职称：讲师，主要研究方向：智能信息处理，人工智能