《数学分析》教材中思政元素的挖掘——以“定积分”概念为例

郑艳萍

（太原师范学院数学系　山西晋中　030619）

摘要：基于非智力因素对学习的影响，结合本教学团队多年的数学分析教学经验，以定积分概念教学为例，全方位挖掘教材中的思政元素，力求数学分析专业课程与思想政治理论课程同向同行，产生协同效应。

关键词:非智力因素 定积分概念 思政元素

中图分类号:G642 文献标识码: A

Mining the Ideological and Political Elements in Mathematical Analysis

Zheng Yanping　Wang Haijun　Zhang Ruifang　Wang Junxia　Wang Lei

(Department of Mathematics , Taiyuan Normal University ,　Shanxi　Jinzhong　030619)

Abstract: Based on the influence of non-intellectual factors on learning, combined with the team's years of teaching experience in mathematical analysis, taking the concept teaching of definite integral as an example, the team fully excavates ideological and political elements, and strives to make the mathematical analysis course and ideological and political theory course lead to the peer, forming a synergistic effect.

Keywords:　Non-intellectual factor; Concept of definite integral; Ideological and Political　elements

引言

教育是培养人的一种社会活动。唐朝伟大文学家韩愈在《师说》中提出:”师者，传道、授业、解惑也”。因此，教育不应仅仅局限于传授知识。燕国材教授在文献[1]中指出:教育改革必须顾及非智力因素的特点与规律，教育改革要有利于培养非智力因素。而对数学分析课程中思政元素的挖掘正是从教育的非智力因素出发， 从侧面引导学生学习、 激发学生动力， 从而强化课堂教学效果。

《数学分析》是师范类院校数学专业最重要的基础课之一，而积分是函数分析性质的三大性质之一。不论是定积分还是重积分、曲线积分、曲面积分都运用了分割、近似求和、取极限的方法。它们的定义方式、研究方式和应用方式都与定积分的相关理论一脉相承。选择定积分概念做思政元素分析具有典型性、继承性、长期性，可以很好地发挥其维持作用、调控作用和强化作用。

近几年来，很多教育工作者都关注《数学分析》中的思政元素的挖掘，参见文献[2]–[5]。

本文以“定积分的概念”教学为例，从以下几个方面对定积分的所蕴含的思政元素予以挖掘。

1。追根溯源——数学史

数学上任何概念的提出、理论的发展都不是一蹴而就的。充分挖掘数学史中闪现的思政元素，可以激发学生的兴趣，使数学变得有温度。数学史中呈现的一代代数学家的奋斗精神、钻研精神能够很好地激发学生学习的动力、激扬学生学习的热情，鼓舞学生学习的士气。

定积分的主要思想是微元法。该思想早在公元前 5 世纪时的古希腊就有所萌芽，而将其应用最好的当属阿基米德。我国魏晋时期刘徽的“割圆术”与“出入相补”原理就是微元法的思想，这比西方的相关研究早了 1000 多年。沿用刘徽的思想，祖冲之父子对球体体积公式予以研究。德国天文学家开普勒运用无穷小思想计算出圆的面积和旋转体的体积，伽利略运用类似开普勒的面积思想，明确了一个事实：面积是以无数条不可分的线为单位堆积而成的，这又渗透着实变函数中“基数”的思想。终于在 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨最终完成了微积分工作最后也是最关键的一步。[2]难怪牛顿说：“如果我比其他人看得远些，那是因为我站在巨人的肩膀上。”

通过介绍微积分概念的发展历史，第一，可以培养学生的学习兴趣。第二，培养学生优良的品德。在此，仅以微积分的先驱--阿基米德为例来说明。阿基米德为人称道的是他发现浮力定律和杠杆原理的故事。因为他懂得杠杆原理，说出了“给我支点，我就能撬起地球”这样不可思议的“狂言”。他不光“知”而且“行”。据杠杆原理，他做了一个滑轮组，一个人将一艘大船轻而易举地从海上拉进了港口。通过该故事启发学生要知行合一。第三，激发学生的学习热忱。阿基米德 70 多岁的时候，阿基米德用“新式武器”武装了祖国军队，击败了祖国的入侵者。告诉学生：知识就是力量，知识就是生命，由此激发学生的学习热情。第四，激发学生的爱国热忱。攻城三年后， 阿基米德被刺死。由此激发学生的爱国热情，国家的强盛是我们生活幸福的坚强后盾，依此培养学生的爱国情操。

2。 以道御术——哲学观

从世界观上讲，哲学可以指导数学发展；从方法论上讲，哲学又可以认识数学本质。钱学森在《发展我国的数学科学》中指出“我认为每一门科学都有一个哲学总结，自然科学的哲学总结就是自然辩证法……数学科学的哲学总结就是数学哲学……”因此，挖掘《数学分析》中潜在的哲学元素是十分必要的。在定积分概念的教学中，可以这样引进：

陆九渊的《鹅湖和教授兄韵》：“涓流积至沧溟水，拳石崇成泰华岑。”……告诉我们“万物起于忽微，量变引起质变。”这些深邃的哲学思想在定积分的概念建立过程中体现地淋漓尽致。具体教学过程如下：

引例 1 求曲边梯形的面积。

曲边梯形可以这样定义:设 f 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x)\ge 0,$ 由曲线 $y=f(x),$ 直线 $x=a, x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形称为曲边梯形。下面讨论曲边梯形面积(这是求任何可求面积的曲线边界图形面积的基础)。

在初等数学里，圆的面积: 里边用内接正多边形的面积来填充，外边用外切正多边形来来包，随着正多边形边数增加，从外面包得越来越紧，从里面填得越来越满，外包内填，最终与圆的面积趋于相等。在该方法中渗透了“以直代曲、无限求和”的数学思想。现在仍用该思想来定义曲边梯形的面积。

第一步，分割。插入 $n-1$ 个分点 $x_i: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 于区间 $[a,b]$ 上， $\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^{n}$ 构成 $[a,b]$ 的一个分割。直线 $x=x_i, i=1,2,\cdots,n-1$ 把曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形。

S_i 与 S 分别表示第 i 个小曲边梯形的面积与曲边梯形的面积，则 $S=\sum_{i=1}^{n}S_i$ 。这个过程是无限分割的过程。

第二步，近似求和。$\forall \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, 作以 $f(\xi_i)$ 为高，$[x_{i-1},x_i]$ 为底的小矩形。当分割 $[a,b]$ 的分点较多又分割的较细时，注意到 $f(x)$ 连续，当小区间的长度足够小时，$f(x)$ 的值几乎不变，可用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 第 i 个小矩形的面积近似代替 S_i，即 $S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ 。于是有

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

这个过程是以直代曲的过程。

第三步，取极限。注意到(1)式右边的和式有两个相关: $[a,b]$ 的分割(Δx_i)与中间点 ξ_i 。当对 $[a,b]$ 无限细分时，若此和式与某一常数无限接近，且做到两个无关， 则把此常数作为曲边梯形的面积 $S.$ 该过程是无限求和的过程。

引例 2 变力做功。采取的方法与处理曲边梯形面积的方法类似: 分割，近似求和，取极限，不再赘述。

上面两个例子，都渗透着深刻的哲学思想，都经历了化整为零，以直代曲，积零为整，无限细分的过程，最终归结为某种形式的和式逼近。实现了以退为进，从有限到无限，量变到质变，近似到精确。

将上述过程一般化，即引出“定积分”的概念，完整叙述需要定义 1–3。

定义 1 分割闭区间 $[a,b]$ ：记分割 $T=\left\{x_0,x_1,\cdots,x_n\right\}$ 或 $T=\left\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\right\}$ ，且 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\Delta x_i\right\}(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$，称为分割 T 的模。$n$ 越来越大的过程就是无限细分的过程。

定义 2 Riemann 和：设 $f(x), x\in[a,b].$ 给定分割 $T=\left\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\right\}$，$\forall \xi_i \in \Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，并作和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，则称和式为函数 f 在 $[a,b]$ 上的一个积分和，也称 Riemann 和。这是以直代曲的过程，这个过程体现了“万物起于忽微”，这小小的替代，微微的改变，可以使需要解决的问题“柳暗花明又一村”。同时，以直代曲是解决问题最自然的想法。在此，也可以提醒学生要学会人与自然和谐相处。

定积分的定义 3 可以借助定义 1–2 被简洁地表述。

定义 3。设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数，J 是一个确定的实数。若对 $\forall \varepsilon > 0,$ 总存在某一正数 δ，使得对于 $[a,b]$ 的任何分割 T 以及点集 $\left\{\xi_i\right\}$，只要 $\|T\|<\delta,$，则有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon,$ 则称函数 f 在 $[a,b]$ 上可积或 Riemann 可积。数 J 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分或 Riemann 积分，记作

$$J=\int_a^b f(x)dx.$$

建立定义 1 ~ 定义 3 过程经历了量变引起质变，近似到精确的过程。同时也应在此借机告诉学生：量变引起质变，但这个“量”是需要我们潜心累积的，是一个需要以恒心为伴，寂寞为伍的漫长的过程，若稍有半点动摇，就会前功尽弃。学习数学更是如此。

3。学以致用——模型建

在我作为学生时，不止一次问过我的恩师，学习数学有什么用? 现在，当了老师，也不只一个学生问我：“学习数学到底有什么用？” 在学生刚接触微积分时，找一些难度适中的建模题，作为开放性、拓展的习题是很有必要的。以此提高学习的兴趣。比如讲定积分的概念时，可以预留这样一道建模题。

篮球运动员在中距离投篮时应以 45° 投射角投球。结合具体数据：投篮距离 6 米，篮圈半径 0.2 米，篮圈高度 3.05 米，篮球出手高度 2.9 米。 从数学理论的方法予以解释该方法的合理性。

这是一道只要假设合理，仅需应用积分的相关知识就可以给出一个简单模型的建模题，而且模拟效果还比较准确。

学生也许一时半会无从下手，但是可以引导他们可以查资料，找材料，用软件，建团队，共同克服困难，解决问题，这恰是一种培养学生的科研意识、查阅资料、论文写作、团队精神的比较好的一种教学方式。

4。家国情怀——齐抗疫

在定积分概念的建立过程中，函数 $f(x)$ 在每个小区间上每一点的取值都会影响积分和，但同时由于每一点的值都来源于被积函数 $f(x)$，服从函数 $f(x)$，从而才能使积分和趋向定积分值。通过该过程教育学生：整体能够决定个体，国家决定个人命运;个体的累积又影响整体。我们国家在抗击新冠肺炎中能取得如此成就，离不开国家对疫情的整体调控策略;同时，抗役的胜利也离不开每个公民对国家政策的支持与执行。让学生明确个人前途与国家发展相一致，焕发学生爱国力行的强大内驱力。只有和国家同呼吸共命运，才能实现个人的自由全面发展，才能实现伟大的“中国梦。”

这样，把积少成多，量变到质变的哲学思想融入到定积分概念的教学中，同时也把国家与个人，整体与部分的关系融入其中，培养学生的哲学思想与坚定的爱国主义情感，进而培养学生努力奋进的品格。

5。紧跟前沿——共创新

数学上任何一种概念、理论的提出应该是开放性的、可持续发展的，定积分概念也不例外。由于 Riemann 积分的局限性，诞生了 Lebesue 积分，而由于整数阶微积分方程在解决实际问题时不那么完美，分数阶微积分才被广泛应用。在定积分教学时，可以稍微介绍一下分数阶微积分的相关知识及其简单应用，让本科生尽早地接触学科前沿，不仅可以激发他们的学习兴趣，还可以使学生拥有实现民族复兴的理想，增强学习的主动性。

当我们以教育学原理为指导，从育人的本质为出发点，结合课程的特点， 在课堂教学中润物细无声地渗透思政元素，学生才有可能成为社会主义合格的建设者和接班人，课程思政一直在路上。

参考文献：

[1]燕国材.非智力因素与教育改革[J].课程•••教材•教法,2014, 34(7): 3−9.

[2]周霞等.数学史融入定积分概念教学的案例设计[J].大学数学,2018,34(3):115−120.

[3]马林涛.探讨“数学分析”课程思政策略[J].教育教学论坛,2020, 45:36−37.

[4]杜金娅,王阳洋等.思政元素在《数学分析》概念教学中的应用——以“第二型曲面积分”概念为例[J].高等数学研究,2020, 23(1):26−28.

[5]李婷婷.数学分析“课程思政”教育教学改革研究[J].科学咨询,2020,714(46):50−50.

郑艳萍（1978−），女，汉族，山西省吕梁市，硕士研究生，主要究方向：算子理论与算子方程