几何符号语言训练初探

耿征

（江苏省徐州市第十三中学　江苏 徐州　221006）

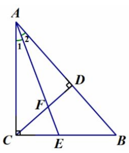
背景：初中课标要求什么？这就对学生提出要求，训练合情推理和演绎推理的能力。如何体现这两种能力呢？就是几何符号语言的书写。从初一下平面图形的初步认识，到初三的圆，无不需要符号语言的训练和书写。如何提高学生符号语言书写的能力呢？

关键词：文字语言图形语言符号语言

首先，请看三个案例。

案例 1 已知：如图，在△ABC 中，∠ACB=90° ，AE 是角平分线，CD 是高，AE、CD 相交于点 F。求证：∠CFE=∠CEF

证明：∵∠ACB=90°



∴∠CEF+∠1=90° （直角三角形两锐角互余）

∵CD 是高

∴∠AFD+∠2=90° （同上）

∵AE 平分∠CAB，

∴∠1=∠2=$\frac{1}{2}$∠CAB（角平分线的定义）

∴∠CEF=∠AFD（等角的余角相等）

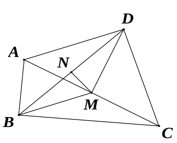
∵∠AFD=∠CFE（对顶角相等）

∴∠CFE=∠CEF（等量代换）

像“∵∠ACB=90° ，∴∠CEF+∠1=90° （直角三角形两锐角互余）”、“∵AE 平分∠CAB，∴∠1=∠2=$\frac{1}{2}$∠CAB（角平分线的定义）”、“∠CEF+∠1=90° ，∠AFD+∠2=90° ，∠1=∠2，∴∠CEF=∠AFD（等角的余角相等）”这些符号语言的描述，是相关结论最基本的描述，但对于“∵AE 平分∠CAB，∴”，有的学生都说不出来，这说明学生对角平分线这个基本的定义都不能理解，何况要将整个问题的过程书写出来呢？

由此可以看出，如何从众多的几何定理中选出题目需要的是学生几何符号语言学习的第一个困难。

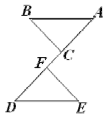
案例 2 已知：如图，∠ABC=∠ADC=90 ，M、N 分别是 AC、BD 的中点，求证：MN⊥BD。



这个图形，学生见到很多遍，但是仍然存在困难——不知道该如何下手。为什么会这样呢？

符号语言的学习，归根结底就是每个定理的符号语言的学习。而要想训练符号语言的书写，本质是文字语言的理解，就是用图形和符号来理解。而书写的本质，就是图形和符号的联想，即由图形想到相应的符号语言。而学生缺少文字语言和图形语言、符号语言之间的互相转化，是几何符号语言学习的第二个困难。

案例 3（1）如图，点 C、F 在 AD 上，且 AF＝DC，∠B＝∠E，∠A＝∠D，你能证明 AB＝DE 吗？



在△ABC 和△DEF 中，

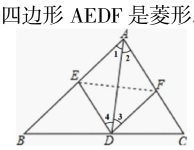
$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ \angle A = \angle D \\ AF = DC \end{cases}$$

∴△ABC≌△DEF

∴AB=DE

可以看出，学生使用全等依据的方向是正确的，但是，所列的条件“AF=DC”却并非证明三角形全等的所需条件。

（2）如图，在三角形纸片 ABC 中，AD 平分∠BAC，将△ABC 折叠，使点 A 与点 D 重合，展开后折痕分别交 AB、AC 于点 E、F，连接 DE、DF．求证：四边形 AEDF 是菱形.



由折叠，AE=FD，AF=DF

AD⊥EF

∴∠1=∠4，∠3=∠2

又∵AD 平分∠BAC

∠1=∠2

∴∠1=∠4，∠2=∠3

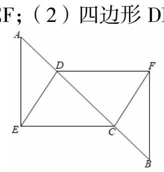
∴AE∥DF，AF∥ED

∴四边形 AEDF 是菱形

按照学生的思路，最终是利用“对角线互相垂直的平行四边形是菱形“来证明，但是书写过程中却没有和“平行四边形”相应的符号语言。

（3）如图，点 A、D、C、B 在同一条直线上，AC＝BD，AE＝BF，AE∥BF．求证：

（1）△ADE≌△BCF；（2）四边形 DECF 是平行四边形.



（2）∵△ADE≌△BCF

∴DE=CF

又∵∠ADE=∠BCF

∴∠EDB=∠BFA

∴DE∥CF，DE=CF

∴四边形 DECF 是平行四边形

可以看出，是依据“等角的补角相等“得∠EDC=∠FCD，但与”补角“相应得符号语言没有出现。

因此，完整地呈现出整个演绎推理的过程是学生几何符号语言学习的第三个困难。

如何解决学生几何符号语言学习的三个困难呢？考虑从以下两个方面，依次推进学生几何符号语言的训练。

一、宏观上，建构知识网络

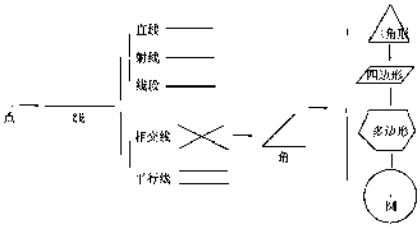
学生对几何图形的认识，是一个由简单到复杂的过程。先是认识点、线，再到形、体；先是每种图形的定义、表示方法，再到每种图形的性质和判定；先是孤立学习每个图形，再到图形之间的联系和结合。

1、建立图形体系

对于点，初中阶段仅仅认识其表示方法。

线，有单线和双线之分。单线包括直线、射线和线段。双线包括相交线和平行线两种位置关系的线。而相交线又会产生角这种图形。

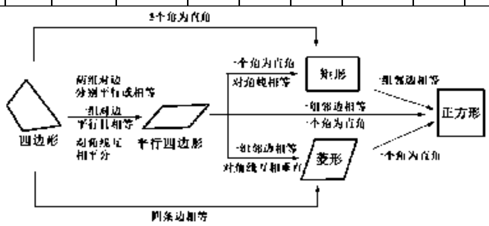
再说形。初中阶段主要研究三角形、四边形和圆形三种图形。



2、建立图形性质和判定体系

比如说，四边形。初中阶段主要从旋转角度研究特殊的四边形，包括平行四边形、矩形、菱形、正方形，而每一种图形的性质和判定研究的过程又很相似。

图形	对称性		边		角			对角线		
	轴对称图形	中心对称图形	对边平行且相等	四边相等	对角相等	邻角互补	四个角都是直角	互相平分	相等	互相垂直
平行四边形										
矩形										
菱形										
正方形										

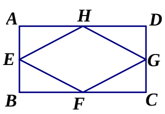


3、建立图形之间联系的体系

像案例 1，学生在解决问题时，用到的不是单一的知识，而是知识之间的联合。

比如中点。最初在《平面图形的认识一》中，理解中点的概念。《平面图形认识二》，认识三角形的中线。《轴对称图形》，认识直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。《中心对称图形——平行四边形》，再次认识三角形中位线的概念及性质。如何将这些有关中点的结论串联起来呢？

举例来说。如图，E、F、G、H 分别是矩形 ABCD 各边的中点，四边形 EFGH 是怎样的特殊四边形？证明你的结论。



解法一：证明△AEH≌△BEF△CGF△DGH，需要利用中点的概念得到 AH=HD=FC=BF，AE=EB=DG=CG。

解法二：连接 BD。由 EH 是 ABD 的中位线得到 EH∥BD，$EH=\frac{1}{2}BD$。同理，FG∥BD，$FG=\frac{1}{2}BD$。从而 EH∥FG，EH=FG。得四边形 EFGH 是平行四边形。再由矩形对角线相等得到 EH=EF。从而为菱形。

通过两种不同的解法，将中点的概念和中位线的定理联系起来。也就是说，有意识引导学生产生联想，以点及面，沟通知识之间的横向联系。

二、微观上，建立每一个结论的文字语言、图形语言和符号语言之间的桥梁

（1）明确每个命题的本质——条件和结论

比如学习三角形内角和定理

教师：你能将其改写为“如果…，那么…”的形式吗？

学生：如果一个图形是三角形，那么它的三个内角的和是 180°。

教师：很好。可以看出，条件就是一个图形——三角形，结论就是三个内角的是 180°。

教师：由此，根据条件就是画一个什么图形？

学生：三角形。

学生操作。

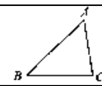
教师：相应的，请用根据条件和结论，用符号语言描述这个命题。

学生：已知：△ABC，

求证：∠A+∠B+∠C=180°

开始证明。

教师：由此，我们可以得到三角形内角和定理。

文字语言	图形语言	符号语言
三角形的三个内角的和是 180°		∵△ABC， ∴∠A+∠B+∠C=180°

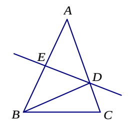
每个命题都是由条件和结论组成——而这也正是每个命题的本质；明确了条件和结论，学生就不会再出现条件和结论分离的情况，就像前面提到的第三个案例——全等三角形证明过程。

因此，每个命题的学习，都是先引导学生明确条件和结论。

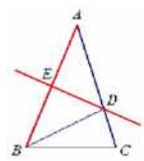
（2）有意识强化三种语言之间的联系

对于每一个命题，文字语言、图形语言和符号语言时不可分割的三部分。每每遇到，都需要有意识引导学生强化三种语言之间的转化。

例如，如图，在△ABC 中，AC=5，BC=4，AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB、AC 于点 E、D。求△BCD 的周长。



教师：题目中提到了垂直平分线，你能在图中找到吗？



学生：

教师：很准确。由此，你就可以怎样书写？

学生：∵ED 垂直平分 AB，

∴DA=DB

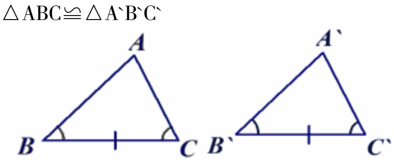
很显然，当学生用红笔描出垂直平分线的时候，就自然能够写出相应的符号语言——水到渠成。

因此，每一个题目，都是强化训练的一次机会。每遇到一个题目，都要引导学生借助关键词找到相应的图形。这样就将文字语言、图形语言和符号语言紧紧联系在一起。

甚至有时候，我们又可以反其道而行。

比如，已知：如图，在△ABC 和△A`B`C`中，∠B = ∠B`，∠C = ∠C`，BC= B`C`，

求证：△ABC≌△A`B`C`



教师：经过证明，这是个真命题。

教师：你能根据命题，用文字描述出条件和结论吗？

教师引导指向图形标注的条件。

学生：如果两个三角形的两组角及夹边分别相等，那么这两个三角形全等。

教师:总结的很好.我们把这种条件叫做“角边角“或者”ASA“。

可以看出，就是引导学生从符号语言——图形语言——文字语言，尝试用自己的语言描述出命题的条件和结论。这不失为一种训练。

训练学生几何符号语言的书写，不是一蹴而就的事情；还会继续探索。