关于一类三角函数积分的计算

钱小瑞

（成都锦城学院　四川成都　610031）

摘要：被积函数是三角函数的不定积分结果可能不是三角函数，三角函数间的关系错综复杂，在计算含有三角函数的不定积分的时候，借助三角函数的倍角（半角）公式、和差化积、积化和差、万能公式等可以进行快速有效的计算。关于被积函数含有三角函数的积分计算，可以借助不同的凑微分变形得到结果。

关键词：三角函数；不定积分；和差化积

中图分类号：O172　　文献标识码：A

Different Methods of Integral Calculation of Trigonometric Function

QIAN Xiao-rui

(ChengDu Jincheng College ， Chengdu Sichuan, China 610031)

Abstract：In order to get the result of the indefinite integral– cosx/(sinx+cosx), the trigonometric identity , the universal formula, and the relationship between trigonometric function may make great help. The same primitive function family will get in different forms.

Key words: Trigonometric Function; Indefinite Integrals; Trigonometric Identities

0 引言

不定积分的计算方法很多，常见的是借助基本初等函数不定积分公式的凑微分法[1]。关于三角函数的凑微分公式，常用的有：$\cos x=d\sin x$，$\sin xdx=-d\cos x$，$\sec^2 xdx=d\tan x$。根据微分的四则运算法则，可以得到下面的结论：$(\cos x+\sin x)dx=d(\sin x-\cos x)$，$(\cos x-\sin x)dx=d(\sin x+\cos x)$，这两个公式在计算被积函数中含有$\sin x$和$\cos x$的和差运算的时候非常有用。有的时候也会借助万能公式对被积函数进行简化[2]，如果能够借助欧拉公式也会得到意想不到的结果[3]。

1 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 的计算方法

（1）利用 $(\cos x+\sin x)dx=d(\sin x-\cos x)$，$(\cos x-\sin x)dx=d(\sin x+\cos x)$

$$\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C_1$$（C_1为任意常数）

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2$$

（C_2为任意常数）

则
$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C$$（C为任意常数）

（2）利用三角函数和差化积和积化和差公式

$$\cos x=\cos(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$$

则

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\frac{d\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\cos(x-\frac{\pi}{4})|+C$$（C为任意常数）

（3）利用三角函数的倍角公式：$\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}dx=\int\frac{\cos^2 x-\cos x\sin x}{\cos 2x}dx$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos 2x}dx=\int(\frac{\frac{1}{2}}{\cos 2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan 2x)dx$$

$$=\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec 2x-\frac{1}{2}\tan 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|(\sec 2x+\tan 2x)\cos 2x|+C$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|1+\sin 2x|+C$$（C为任意常数）

（4）利用$\sec^2 xdx=d\tan x$，$\sec^2 x=1+\tan^2 x$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\tan x}dx=\int\frac{1}{1+\tan x}\cdot\frac{1}{\sec^2 x}\cdot\sec^2 xdx=\int\frac{1}{1+\tan x}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}d\tan x$$

令$t=\tan x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},x\neq-\frac{\pi}{4})$，使用换元法

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1-t}{1+t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\arctan t-\frac{1}{4}\ln\frac{1+t^2}{(1+t)^2}+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}+C$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$$（C 为任意常数）

（5）利用万能公式：$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，$\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}(-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2},x\neq-\frac{\pi}{8})$，则 $dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx=\frac{1}{2}(1+t^2)dt$，使用换元法

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1-t^2}{2t+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{(1-t)(2t+2)}{(2t+1-t^2)(1+t^2)}dt$$

$$=\int(1-t)\left(\frac{1}{2t+1-t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{1-t}{2t+1-t^2}dt+\int\frac{1-t}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2t+1-t^2}d(2t-t^2)+\int\frac{1-t}{1+t^2})dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right|+\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right|+\frac{x}{2}+C$$（C 为任意常数）

（6）利用半角公式：$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$，$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right|+\frac{x}{2}+C$$（C 为任意常数）

此方法本质上与（5）万能公式相同。

（7）利用欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，将三角函数用复指数表示：$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$。

计算过程中，可将复数单位 i 看做是常数。

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}dx=\int\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{(e^{ix}+e^{-ix})-i(e^{ix}-e^{-ix})}dx$$

$$=\int\frac{(1+i)(e^{ix}+e^{-ix})}{(1+i)[(1-i)e^{ix}+(1+i)e^{-ix}]}dx=\int\frac{e^{ix}+ie^{-ix}+ie^{ix}+e^{-ix}}{2(e^{ix}+ie^{-ix})}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{ie^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}+ie^{-ix}}\right)dx=\frac{1}{2}x+\int\frac{ie^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}+ie^{-ix}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\int\frac{1}{e^{ix}+ie^{-ix}}d\left(e^{ix}+ie^{-ix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x+\ln|e^{ix}+ie^{-ix}|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x+\ln|\cos x+i\sin x+i(\cos x-i\sin x)|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x+\ln|\cos x+\sin x|+\ln|1+i|+C_1$$

$=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C$（$C=\ln|1+i|+C_1$，为任意常数）

2 结语

被积函数中含有的三角函数类型不同的时候，可以利用三角变换化为用一个三角函数表示的函数。如果被积函数同时还是分式的话，可以考虑将分子拆分为分母表达式整体的函数或者是分母表达式整体导数的函数。借助欧拉公式可以在复变函数的基础上对实函数积分进行刻画也是一种好的方式。

不定积分的结果形式可以是多样的，采用不同的视角将会得到不同形式但本质相同的原函数族。不定积分的计算方法多样，很多一题多解的情况。方法不同，计算的难易程度有差异。有的时候不必过于追求最简形式，知识之间的联系和思考的广度都是需要的。教师教学或者学生做题过程中，最开始的时候都可以考虑一题多解，方法慢慢总结，方法之间的联系慢慢体会，能实现维度的跨越是最好的。

参考文献：

[1]陈传璋，金福临.数学分析(上)[M].北京:高等教育出版社,1983:242−258.

[2] 吴传生.微积分[M].北京:高等教育出版社,2015:225−228.

[3]詹国梁.欧拉公式及其在不定积分计算中的应用[J].东吴教学,1988(01):1−4.

作者简介：钱小瑞（1983−），女，河南新野人，硕士，讲师，研究方向：概率论与数理统计