看涨幂期权定价—基于股指期权的实证

王富磊　阿卜杜凯尤木·赛麦提　张桂

（新疆科技学院）[1]

摘要：本文围绕欧式看涨幂期权定价公式展开，从标准欧式看涨期权定价公式引申出有连续红利和无连续红利的欧式看涨幂期权风险中性定价公式。最终，将欧式看涨幂期权风险中性定价公式对上证指数进行实证分析，并将欧式看涨幂期权定价和标准欧式看涨期权定价进行比较分析。研究发现，与标准欧式看涨期权定价比较，欧式看涨幂期权定价具有较大价格优势和灵活性，表明欧式看涨幂期权更易被广大投资者接受和利用。本文的目的在于为中国资本市场未来开发期权非标准产品提供重要借鉴。

关键词：欧式看涨幂期权定价公式；灵活性；价格优势；比较分析

一、前言

期权作为一类衍生品，具备套期保值与风险管理的作用。国内能够满足广大投资者需求的衍生产品不仅不足，还价格昂贵，本文正是基于该现状，提出要将一类非标准期权即幂期权在中国的资本市场得到应用，因为幂期权能跟据幂参数的设置来变动期权价格，使幂期权风险中性价格相比标准期权风险中性价格更加低廉。

期权不仅仅有标准欧式和美式看涨看跌产品，还有许多非标准产品，非标准产品随着期权支付形式的变化其定价也在不断变化。由于期货合约规模较大、期货合约具有较严格的制度规定，期权同期货相比具有较大的定价灵活性和产品多样性。相比标准欧式看涨期权，本文得出了欧式看涨幂期权具有更好的价格优势性和定价灵活性的结论。

二、研究过程

全文研究分为如下五部分：(1)基于标准欧式看涨期权定价引申出欧式看涨幂期权定价公式，即欧式看涨幂期权的风险中性价值，包括有连续红利和没有连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性价值。(2)分析没有连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性价格性质。(3)波动项的估计采用 Garman 和 Klass(1980)[1]的估计方法，即开盘价和收盘价的对数价格差方法。(4)设计以上证指数为标的资产的欧式看涨幂期权风险中性价格。(5)将欧式看涨幂期权与传统欧式看涨期权进行比较分析，给出比较结果并得出结论。

三、研究建模

3.1 标准看涨期权定价公式

设标的物价格为几何 Brown 运动：

$$dS_t = S_t \times (\mu d_t + \sigma dB_t) \tag{1}$$

B_t 是标准 Brown 运动，具有过程独立增量的性质。S_t 是资产在 t 期的价格。依据 Ito 公式，得到标的物价格序列公式为：

$$S_t = S_0 \times \exp((\mu - 0.5 \times \sigma^2) \times t + \sigma \times B_t) \tag{2}$$

S_0 是资产基期价格，σ 是几何 Brown 运动的波动项，$\mu - 0.5*\sigma^2$ 是漂移项。假设无连续红利欧式看涨期权的风险中性价值为 C(K,S,T, σ ,r)，S 是资产基期价格，K 是欧式看涨期权的执行价格，T 是到期时间，σ 是波动项，r 是无风险利率，根据 Merton(1973)的期权定价理性理论，标的物与衍生资产价格的贴现过程是鞅过程[1]：

$$\bar{S}_T = S_0 \times \exp((-0.5 \times \sigma^2) \times T + \sigma \times B_T), \bar{S}_T = S_T \times \exp(-r \times T)$$
$$C(K,S,T,r,\sigma) = \exp(-r \times T) \times E[(S_T - K)^+], (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\} \tag{3}$$

服从几何 Brown 运动的参数可以用最大似然估计法(MLE)对参数 μ 和 σ^2 进行估计，设 $X_t = \log(S_t) - \log(S_{t-1})$，对数似然函数为：

$$\log L = -0.5 \times T \times \log(2\pi) - 0.5 \times T \times \log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^{T} [\{(X_t - \mu + 0.5 \times \sigma^2)^2\} / (2 \times \sigma^2)] \tag{4}$$

参数 μ 和 σ^2 的一致估计值为：

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2 / T}, \bar{x} = \sum_{t=1}^{T} x_t, \hat{\mu} = \bar{x} + 0.5 \times \hat{\sigma}^2 \tag{5}$$

设 Φ 是标准正态分布的累积分布函数，则在风险中性测度下，或者在等价鞅测度下，无连续红利的欧式看涨期权定价公式为[6]：

$$C(K,S,T,r,\sigma) = \exp(-r \times T) \times E[(S_T - K)^+]$$
$$= S_0 \times \Phi(\xi) - K \times \exp(-r \times T) \times \Phi(\xi - \sigma\sqrt{T})$$
$$\xi = \frac{\ln(S_0 \times \exp(r \times T)/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \tag{6}$$

若考虑具有连续红利的资产 S_t，设 q 是资产的连续红利率，则 $S_t = F_t * \exp(q*t)$，F_t 服从(1)式表示的几何 Brown 运动，即标的物价格 S_t 服从如下的一般 Ito 过程：

$$dS_t = S_t \times [(\mu - q)d_t + \sigma dB_t] \tag{7}$$

具有连续红利率 q 的风险中性欧式看涨期权风险中性价格 C^q(K,S,T, σ ,r,q)为[8]：

$$C^q(K,S,T,r,\sigma,q) = \exp(-r \times T) \times E[(S_T - K)^+]$$
$$= S \times \exp(-q \times T) \times \Phi(\xi) - K \times \exp(-r \times T) \times \Phi(\xi - \sigma\sqrt{T})$$
$$\xi = \frac{\ln(S \times \exp[(r - q) \times T]/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$
$$C^q(K,S,T,r,\sigma,q) = C(K, S \times e^{-qT}, T, r, \sigma) \tag{8}$$

3.2 欧式看涨幂期权风险中性定价

标准期权的支付形式是资产价格的线性函数，其价值为：

$$(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\} \tag{9}$$

但是有更多的期权的支付形式的价值是[2]：

$$(f(S_T) - K)^+ = \max\{f(S_T) - K, 0\} \tag{10}$$

f 是任意的既定函数，K 是期权执行价，T 是到期时间，如果 $f(x) = x^a$，则该期权价值是以非线性的形式表示，则具有非线性支付期权价值为 $(f(S_T) - K)^+$ 的期权被称为幂期权，a 为幂参数[2]。设 C_a(K,S,T, σ ,r)为欧式无红利看涨幂期权风险中性价值。资产基期价格 S，波动项 σ，执行价格 K，到期时间 T，无风险利率 r。假设随机变量 X 服从一个期望为 $T*(r-\sigma^2/2)$，方差为 $T*\sigma^2$ 的正态分布，则基于标准欧式看涨期权定价公式得出：

$$X \sim N(T \times (r - \sigma^2/2), \sigma^2 \times T)$$
$$\exp(r \times T) C(K,S,T,r,\sigma) = E[(S_T - K)^+] = E[(S_0 \times e^X - K)^+] \tag{11}$$

因此，无连续红利的欧式看涨幂期权风险中性价值 C_a(K,S,T, σ ,r)为：

$$C_a(K,S,T,r,\sigma) = \exp(-r \times T) \times E[(S_T{}^a - K)^+]$$
$$= \exp(-r \times T) \times E[(S_0{}^a \times e^{aX} - K)^+]$$
$$X \sim N(T \times (r - \sigma^2/2), \sigma^2 \times T) \tag{12}$$

而 aX 是服从均值为 $aT^*(r-\sigma^2/2)$，方差为 $aT^*\sigma^2$ 的正态分布，假设 r_a 和 σ_a^2 是[2]：

$$r_a = a\times(r-\sigma^2/2)+a^2\times\sigma^2/2, \sigma_a{}^2 = a^2\times\sigma^2 \tag{13}$$

从而这种形式下的 σ_a^2 和 r_a 使得：

$$r_a-\sigma_a{}^2/2 = a\times(r-\sigma^2/2) \tag{14}$$

基于以上分析，定义有幂性质无连续红利的特殊 Black-Scholes 价值为 $C(K,S^a,T,\sigma_a,r)$[2]：

$$\begin{aligned} C(K,S^a,T,r_a,\sigma_a) &= \exp(-r_a\times T)\times E[(S_T{}^a-K)^+] \\ &= \exp(-r_a\times T)\times E[(S_0{}^a\times e^Y-K)^+] \end{aligned}$$

$$C(K,S^a,T,r_a,\sigma_a)\times\exp(r_a\times T) = E[(S_0{}^a\times e^Y-K)^+] = E[(S_T{}^a-K)^+]$$

$$Y\sim N(T\times(r_a-\sigma_a{}^2/2),\sigma_a{}^2\times T) \tag{15}$$

因此，无连续红利的欧式看涨幂期权风险中性价值 $C_a(K,S,T,\sigma,r)$ 定义为：

$$\begin{aligned} C_a(K,S,T,r,\sigma) &= \exp(-r\times T)\times E[(S_T{}^a-K)^+] \\ &= \exp(-r\times T)\times C(K,S^a,T,r_a,\sigma_a)\times\exp(r_a\times T) \\ &= C(K,S^a,T,r_a,\sigma_a)\times\exp\{T\times[(a-1)\times(r-\sigma^2/2)+a^2\sigma^2/2-r]\} \end{aligned} \tag{16}$$

根据(11)至(16)陈述，基于 Macovschi 和 Quittard-Pinon(2006)的研究，一个无连续红利欧式看涨幂期权的风险中性定价公式 $C_a(K,S,T,\sigma,r)$ 为[2]：

$$r_a = a\times(r-\sigma^2/2)+a^2\times\sigma^2/2, \sigma_a{}^2 = a^2\times\sigma^2$$

$$\begin{aligned} C_a(K,S,T,r,\sigma) &= C(K,S^a,T,r_a,\sigma_a)\times\exp\{T\times(a-1)\times(r+a\sigma^2/2)\} \\ &= \exp\{T\times(a-1)\times(r+a\sigma^2/2)\}\times[S^a\Phi(\xi)-K\times\exp(-r_a\times T)\times\Phi(\xi-\sigma_a\sqrt{T})] \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{\ln(S^a\times\exp(r_a\times T)/K)}{\sigma_a\sqrt{T}}+\frac{\sigma_a\sqrt{T}}{2} \tag{17}$$

或者基于王亚军和周胜武(2005)的研究 $C_a(K,S,T,\sigma,r)$ 也可表示为[3]：

$$C_a(K,S,T,r,\sigma) = S^a\times\exp\{T\times(a-1)\times(r+a\sigma^2/2)\}\times\Phi(\xi_1+(a-1)\times\sigma\sqrt{T})-K\times\exp(-r\times T)\times\Phi(\xi_2)$$

$$\xi_1 = \frac{\ln(S^a/K)+T\times a(r+\sigma^2/2)}{a\sigma\sqrt{T}}, \xi_2 = \xi_1-\sigma\sqrt{T} \tag{18}$$

当 a=1，$C_a(K,S,T,\sigma,r)$ 就是无连续红利欧式看涨期权风险中性价格。基于白斐斐和师恪(2007)的研究，具有连续红利 q 的欧式看涨幂期权的风险中性价格 $C_a^q(K,S,T,\sigma,r,q)$ 为[4]：

$$C_a{}^q(K,S,T,r,\sigma,q) = S^a\times\exp[T\sigma^2\times(a^2-a)/2-aqT+(a-1)rT]\times\Phi(d_1)-K\times\exp(-r\times T)\times\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S^a/K)+T\times[a\times(r-q)+(a^2-a/2)\times\sigma^2]}{a\sigma\sqrt{T}}, d_2 = \frac{\ln(S^a/K)+T\times[a\times(r-q-\sigma^2/2)]}{a\sigma\sqrt{T}} \tag{19}$$

3.4 波动项 σ 的估计

波动项 σ 的估计采用 Garman 与 Klass(1985)[5]的方法，对日波动项的估计使用资产开盘数据(J_t)和收盘数据(S_t)，在标的资产服从几何 Brown 运动的条件下，$\log(S_t/S_{t-1})$ 是服从期望 $r-0.5^*\sigma^2$，方差为 σ^2 的正态分布，则 $\log(S_t/S_{t-1})$ 可以表示为[5]：

$$\log(S_t/S_{t-1}) = \log(\frac{S_t}{J_t}\times\frac{J_t}{S_{t-1}}) = \log(\frac{S_t}{J_t})+\log(\frac{J_t}{S_{t-1}}) \tag{20}$$

$\log(S_t/S_{t-1})$ 的总体方差即日波动项平方 σ^2 为：

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\log(S_t/S_{t-1})) &= \mathrm{var}(\log(\frac{S_t}{J_t}\times\frac{J_t}{S_{t-1}})) \\ &= \mathrm{var}(\log(\frac{S_t}{J_t}))+\mathrm{var}(\log(\frac{J_t}{S_{t-1}}))+2\times\mathrm{cov}(\log(\frac{S_t}{J_t}),\log(\frac{J_t}{S_{t-1}})) \end{aligned} \tag{21}$$

假设 $\log(S_t)=O_t$ 和 $\log(J_t)=C_t$，推得 $\log(S_t/S_{t-1})$ 的总体方差 σ^2 为：

$$\mathrm{var}(\log(S_t/S_{t-1})) = \mathrm{var}(O_t-C_t)+\mathrm{var}(C_t-O_{t-1})+2\times\mathrm{cov}(O_t-C_t,C_t-O_{t-1}) \tag{22}$$

由于 O_t-C_t 和 C_t-O_{t-1} 其期望接近于 0，因此可以用(23)式来估计日历史波动项 σ[5]：

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(O_t-C_t)^2}{T}+\frac{\sum_{t=1}^{T}(C_t-O_{t-1})^2}{T}+\frac{2\times\sum_{t=1}^{T}[(O_t-C_t)\times(C_t-O_{t-1})]}{T-1}} \tag{23}$$

这个波动项的估计要比(5)式的波动项估计更好。

对于如(7)式的具有连续分红率为 q 的资产，$\log(S_t/S_{t-1})$ 服从一个期望值为 $r-q-0.5^*\sigma^2$，方差为 σ^2 的正态分布，其波动项 σ 同样可用(23)式估计。

四、实证研究和比较分析

4.1 实证研究

基于前文分析进行如下实证研究：以上证指数作为标的资产，波动项 σ 估计的历史样本区间选择为 2014.1.2 至 2014.2.18，计算到期时期为 T=60 天的没有红利和有红利欧式看涨幂期权的风险中性价格。基于 Garman 与 Klass 的波动项估计方法对上证指数的日波动项 σ 进行估计，得到日波动项估计值为 0.00964。无风险收益率选择为 2 月银行间同业拆解年利率的加权平均值为 3.01%，则年度连续复利利率 r=ln(1.0301)=0.0297。基期价格为 S=2052.08，到期时间 T=60，幂参数 a 的取值范围从 0.95 至 1，期权的执行价格 K 取值范围为 1600 至 1700。当 a=1，欧式看涨幂期权价格就是标准欧式看涨期权风险中性价值。假设股指的年连续复利红利率 q=2%，则基于(17)和(19)式可得到无连续红利和有连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性价格。MATLAB 的分析结果如表 4 和表 5 所示。

表 4 无连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性价格 $C_a(K,S,T,\sigma,r)$

执行价格 K / 幂参数 a	1600	1620	1640	1660	1680	1700
0.95	1.519844	0.972345	0.610274	0.375907	0.227332	0.135037
0.96	15.4801	11.47393	8.35964	5.987188	4.215662	2.918674
0.97	69.46119	57.75916	47.39411	38.36174	30.62106	24.09896
0.98	174.3023	156.4677	139.3029	122.9321	107.4757	93.04213
0.99	309.6196	289.9462	270.3925	251.0064	231.848	212.9897
1	459.9922	440.1015	420.2189	400.3496	380.5016	360.6863

表 5 具有连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性价格 $C_a^q(K,S,T,\sigma,r,q)$

执行价格 K / 幂参数 a	1600	1620	1640	1660	1680	1700
0.95	1.33704	0.849323	0.529265	0.32368	0.194349	0.11462
0.96	14.21033	10.47052	7.582647	5.397496	3.776918	2.598558
0.97	65.86759	54.53453	44.54605	35.88704	28.5064	22.32232
0.98	168.8021	151.1372	134.179	118.0525	102.8759	88.75423
0.99	303.2835	283.6371	264.1228	244.7922	225.7093	206.9503
1	453.1655	433.2766	413.397	393.5327	373.6924	353.8891

4.2 比较分析

经过实证分析(表 4 和表 5)，得到了基于不同幂参数 a 和不同执行价格下的无连续红利和有连续红利的风险中性欧式看涨幂期权价格，而 a=1，欧式看涨幂期权风险中性价格为标准欧式看涨期权风险中性价格。显然，当幂参数 a ▮ 1，随着 a 每降低 0.01，幂期权的风险中性价格就会大幅度下降，幂参数的小幅度降低就会使得欧式看涨幂期权风险中性价格大幅度下降。因此，在幂参数 a 的一定设置下，欧式看涨幂期权相对于标准欧式看涨期权具有一定的价格优势。

（下转第 187 页）

话题,因此怎样合理安排生命终末期的治疗,坦然地对待死亡，成为国人亟需深入思考的问题，说明医学本科生阶段积极实施死亡教育,能够培养他们理性的死亡观,提升教育效率,并致力于推广生前预嘱[7]。③家庭类型：相较于其他家庭类型的医学本科生来说,那些单亲家庭的更不认可生前预嘱。很多研究指出,在家庭关系中,那些单亲青少年在人际认知上存在一定的局限性,他们一般无法获得充足的关怀和关爱,因自身家庭的变故促使其羞于与人交流，整体上缺乏同理心[8]。④其他因素：针对于医学本科生关于“生前预嘱”的认知调查,显示出是否参加过葬礼、家庭所在地、最近一次认识的人去世是什么时候、性格、罹患重病史、家庭中是否讨论过死亡的问题等,均无对比意义[9]。通过分析实际存在的现实性因素,主要是因为医学本科生的生活经验较为缺失,他们的年龄相对较小且调查研究时选取的样本量不足等,因此亟需纳入不同专业、年龄段医学本科生展开深入性的调查。此次研究中,经对 100 名医学院的医学本科生实施“生前预嘱”的认知调查,显示出医学本科生了解 ADs 的认知度为 21.00%,目睹过患者临终前的情况为 58.00%,临终时凭借生命支持系统延长生命 19.00%,认为善终极其关键,需要尊重个人 61.00%,接触过 ADs 的教育或学习 10.00%,认为临终的决定应该由本人决定占比为 51.00%。经本研究结果显示出,医学院的医学本科生认为善终极其关键,需要尊重个人选择,其次为目睹过患者临终前的情况，认为临终的决定应该由本人决定。整体上对了解 ADs 的认知度、临终时接触过 ADs 的教育、学习认识度较低[10-11]。

综上所述,某医科大学的在校临床医学专业的学生对生前预嘱知晓率受多种因素影响,且整体上较低,我们建议在培养阶段就应当加大宣传力度,开设生前预嘱内容,向朋友和周围人渗透医学本科生自己所了解的知识、感悟和体会，以便正确引导患者做出理智选择,为未来临床工作做好角色准备。

参考文献：

[1]邵莉. 老年专科病房护士生前预嘱认知情况测评问卷的编制及信效度检验[J]. 中国医药指南,2022,20(05):116-118+131.

[2]边萌,冯青青,杜毓锋. 太原市社区老年人对生前预嘱认知及态度的现状调查[J]. 中华全科医师杂志,2022,21(01):36-41.

[3]夏博宇,王灵强,王希超,等. 生前预嘱与尊严死亡的研究与思考——生命末期健康管理模式[J]. 中国老年学杂志,2021,41(22):5146-5149.

[4]邢冰玉,缪群芳,梁冠冕. 肿瘤专科医院护士对生前预嘱认知态度及影响因素调查[J]. 循证护理,2021,7(15):2087-2091.

[5]王小丽,周幸莲,余赟,等. 某高职医学院校学生对生前预嘱的认知情况调查[J]. 循证护理,2021,7(07):929-932.

[6]申丽香,王晶晶,吴贝贝,等. 肝硬化失代偿期患者对生前预嘱的认知现状及影响因素分析[J]. 现代医药卫生,2021,37(10):1751-1754+1767.

[7]王兆鑫. 生命选择与死亡尊严:权利保障视角下生前预嘱的立法规制——以《民法典》和《基本医疗卫生与健康促进法》部分条款为切入点[J]. 中国卫生法制,2021,29(03):69-75+88.

[8]林春燕,胡文姝,张玮清,等. 医学本科生对生前预嘱的认知调查及其影响因素分析[J]. 当代医学,2020,26(34):184-186.

[9]贾建业,陈森虎,吴中义,等. 江苏某高校医学研究生生前预嘱认知现状研究[J]. 中华灾害救援医学,2019,7(06):325-329.

[10] 刘芳,王文雅,李微微. 生前预嘱志愿服务体系构建[J]. 医学与哲学,2020,41(24):5-10,47.

[11] 罗峪平,倪晓红,王博,等. 生前预嘱推广:实践与建议[J]. 医学与哲学,2020,41(22):1-7.

（上接第 167 页）

五、结论和启示

本文基于无连续红利和有连续红利的欧式看涨幂期权的风险中性定价公式，进行了实证研究和比较分析。欧式看涨幂期权不仅仅具有较大的灵活性，其灵活性体现在幂参数 a 的变动，而相比较于标准欧式看涨期权，幂期权还具有价格优势，这是建立在幂参数 a 小于 1 的情况下，幂参数的小幅度降低就可以使幂期权的风险中性价格大幅度下降。如果在一个发达的期权市场，若可以根据投资者的风险偏好程度的不同对投资者进行幂参数 a 的设定，使得幂期权的风险中性价格能够在投资者的承受范围之内，则能使广大的投资者参与欧式看涨幂期权买卖。

中国目前尚未建立起期权市场，更没有非标准期权产品，正是鉴于缺乏这方面的定价才进行股指期权定价实证研究，而本文的实证具有很强的操作性。欧美等国家已经建立起了发达的期权市场，期权产品种类日益俱增，期权的 OTC 市场也愈发成熟，满足各类投资者的非标准期权产品层出不穷。基于欧美期权市场的发展，作者认为衍生品市场的成立是要满足广大投资者用于套期保值和风险对冲而建立，衍生品市场需要吸引投资者的产品，而欧式看涨幂期权就是属于这样的一类产品。

参考文献：

[1] R.C.Merton. The Theory of Rational Option Pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973,(4):141-183

[2] S.Macovschi, F.Quittard-Pinon. On the Pricing of Power and Other Polynomial Options[J]. The Journal of Derivatives, 2006,(13):61-71

[3] 王亚军, 周胜武. 基于新型期权—欧式幂期权的定价[J]. 甘肃科学学报, 2005, (17):20-23

[4] 白斐斐, 师恪. 具有连续红利的幂型欧式期权定价[J]. 数学的实证与认识, 2007, (37):33-36

[5] M.Garman, M.J.Klass. On The Estimation of Security Price Volatilities From Historical Data[J]. Journal of Business, 1980,(53):67-78

[6] J.C.Hull. Options, Futures, and Other Derivatives[M]. Prentice Hall. 2011:299-527

[7]王富磊（1988 年），男，河南周口，研究生学历，上海对外经贸大学毕业，研究方向：资本市场。