一类等价无穷小的妙用几例

瞿勇　冯杭

（海军工程大学基础部　湖北省武汉市　430033）

摘要：本文利用一类等价无穷小代换，通过几个极限范例的求解，对有关三角函数的未定式极限问题的求解进行了探讨,思路简洁,易于为学生理解和掌握.

关键词：等价无穷小代换,未定式极限,洛必达法则,泰勒公式

Some Illustrations of Ingenious Uses of A Class Equivalent Infinitesimal

Qu Yong　Feng Hang

Abstract：This paper discussed the solution of the indeterminate form limit problem of trigonometry functions with several examples, proposed a method of using a class of equivalent infinitesimal substitution，which is simple and make students more easily understand and get knowledge of the indeterminate form limit.

Key words：　equivalent infinitesimal substitution, indeterminate form limit, L'Hospital's rule, Taylor formula

Authors：Qu Yong ,associate professor of College of Sciences, Naval University of Engineering;Feng Hang,assistant of College of Sciences , Naval University of Engineering　(Wuhan　430033)

有关三角函数的一些未定式极限问题，用洛必达法则或泰勒公式虽然一般都可算出,但会比较繁琐.

文[1]中给出了如下的等价无穷小代换定理：

定理 1[1]　设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$，且 $\lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$$

文[2]中给出了下述等价无穷小的结论：

定理 2[2] 当 $\alpha \to 0, \beta \to 0$，且 $\alpha \neq \beta$ 时，则有下述等价无穷小：

(1) $\sin\alpha - \sin\beta \sim \alpha - \beta$.

(2) $\tan\alpha - \tan\beta \sim \alpha - \beta$.

(3) $\arcsin\alpha - \arcsin\beta \sim \alpha - \beta$.

(4) $\arctan\alpha - \arctan\beta \sim \alpha - \beta$.

利用定理 2 中的等价无穷小可以方便地解决一些与三角函数有关的 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限问题.

例 1[3][4] (2008 年考研题，数学一) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}.$$

解　由定理 2 结论(1)有

$$\sin x - \sin(\sin x) \sim x - \sin x.$$

再结合使用洛必达法则,于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

注：本例文[3]给出了分别用变量替换,洛必达法则和泰勒公式的计算方法,用洛必达法则时求导有些繁琐，用泰勒公式不好掌握.

例 2[5]　求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

而由定理 2 结论(4)有

$$\arctan x - x \sim x - \tan x.$$

于是再用洛必达法则可得

原式 $\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

注：本例文[5]是用泰勒公式求解的，$\arctan x$ 的泰勒公式不好掌握.

例 3[6]　求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x))}{(\sin x)^3}$.

解　连续使用定理 2 结论(1)，则有

$$\sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x)) \sim \sin x - \sin(\sin x)$$

$$\sim x - \sin x.$$

所以再由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x))}{(\sin x)^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

注：本例文[6]是直接用洛必达法则求解的,分子求导有些繁琐.

例 4[6][7] 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}.$$

不妨设

$\tan x-\sin x\sim ax^k$,(a,k 为常数且 k 为正整数),

则有

$$\tan(\sin x)-\sin(\sin x)\sim a\sin^k x.$$

又由定理 2 结论(2)有

$$\tan(\tan x)-\tan(\sin x)\sim\tan x-\sin x.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{a\sin^k x}{ax^k}$$
$$=1+1=2.$$

注：本例文[6]与文[7]是用泰勒公式求解的, $\tan x$ 的泰勒公式不好掌握.

例 5[7] 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arcsin(\tan x)}{\sin x-\tan x}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arcsin(\tan x)}{\sin x-\tan x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-x}{\sin x-\tan x}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin(\tan x)}{\sin x-\tan x}$$

而由定理 2 结论(3)与(4)有

$$x-\arcsin(\tan x)=\arcsin(\sin x)-\arcsin(\tan x)$$
$$\sim\sin x-\tan x.$$
$$\arctan(\sin x)-x=\arctan(\sin x)-\arctan(\tan x)x$$
$$\sim\sin x-\tan.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arcsin(\tan x)}{\sin x-\tan x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin x-\tan x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin x-\tan x}$$
$$=1+1=2.$$

注：本例文[7]是用泰勒公式求解的, $\tan x$ 与 $\arcsin x$ 的泰勒公式不好掌握.

上述例 3,例 4 与例 5 都是等价无穷小的和式极限问题,不能直接使用等价无穷小代换,但经过适当恒等变形再利用极限运算法则后,即可使用等价无穷小代换,大大地简化了运算.

例 6 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}.$$

解 令 $y=\sin(\tan x)$, 则 $x=\arctan(\arcsin y)$,

不妨设

$$\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)\sim ax^k$$

(a,k 为常数且 k 为正整数).

由定理 2 结论(3)与(4),则有

$$\sin(\tan x)-\tan(\sin x)=y-\tan(\sin x)$$
$$\sim\arctan y-\arctan(\tan(\sin x))=\arctan y-\sin x$$
$$\sim\arcsin(\arctan y)-\arcsin(\sin x)$$
$$=\arcsin(\arctan y)-x$$
$$=\arcsin(\arctan y)-\arctan(\arcsin y)$$
$$\sim ay^k=a[\sin(\tan x)]^k$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a[\sin(\tan x)]^k}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^k}{ax^k}=1$$

注：本例若用泰勒公式求解,由于分子与分母均为 x^7 的同阶无穷小,所以需要展开到 x^7 的高阶无穷小,非常繁琐.而这里通过变量替换与等价无穷小代换,巧妙地解决了这个复杂的极限问题.

以上几例求极限问题,用洛必达法则或泰勒公式求解,均比较复杂;我们巧妙运用了与三角函数有关的几个等价无穷小代换，再结合洛必达法则，使得繁琐的求极限问题变得简单，很好地解决了一类与三角函数有关的未定式极限问题.

参考文献：

[1] 同济大学数学系．高等数学上(第七版)[M]．北京：高等教育出版社, 2014:54−55.

[2] 刘颖,陈逸藻．用等价无穷小替换求极限的几点注释[J].高等数学研究, 2015, 18(5): 57−60.

[3] 李正元,范培华．数学历年试题解析(2020 年版)[数学一][M]．北京：中国政法大学出版社，2019：76.

[4] 袁秀萍．灵活运用泰勒公式 提高解题能力[J]．高等数学研究, 2017, 20(3): 39−41.

[5] 张必胜．关于两个重要极限的教学[J]．高师理科学刊,2017,37(4):52−54.

[6] 陈仲．高等数学竞赛题解析教程(2014)[M]．南京:东南大学出版社,2014:63,76.

[7] 周本虎,任耀峰．大学生数学竞赛辅导—高等数学题型方法 技巧[M]．北京:科学出版社,2015:24,41.

[作者简介] 瞿勇,海军工程大学基础部副教授;冯杭,海军工程大学基础部助教

基金项目：海军工程大学 2020 年教学改革项目.