# 超拓扑空间上的若干超连续映射

周雪 张国芳*

（吉林师范大学 数学学院 吉林 长春 130000;吉林师范大学 数学学院 吉林 四平 136000）

摘要:本文引入并研究了超拓扑空间之间的一些新的映射,分别称为超闭连续映射、超$\star g$闭连续映射、超$\star g$开连续映射和超$\star\star g$闭连续映射,得出每一个超$\star$–连续映射都是超$\star g$开连续映射,每一个超闭连续映射（超$\star\star g$闭连续映射）都是超$\star g$闭连续映射.

关键词：超拓扑空间;超闭连续;超$\star g$闭连续;超$\star g$开连续;超$\star\star g$闭连续

中图分类号：o189

Supra*g closed continuity on supratopological spaces

ZHOUXue,ZHANG Guo-fang*

(Jilin Normal University,College of Mathematics,Jilin Changchun 130000;Jilin Normal University,College of Mathematics,Jilin Siping 136000)

Abstract:In the paper,some new mappings between supra topological spaces are introduced and studied,which are called supra closed continuous mappings,supra*g closed continuous mappings,supra*g open continuous mappings and supra**g closed continuous mappings respectively.It is concluded that every supra*–continuous mapping is a supra*g open continuous mapping and every supra*g closed continuous mapping(supra**g closed continuous mapping )is supra*g closed continuous mapping.

Key words:Supratopological spaces; Supra closed continuous;Supra*g closed continuous;Supra*g open continuous;Supra**g closed continuous

## 引言

1983 年,A.S.Mashhour 等人在《On Supratopological Spaces》[1]利用超开集定义并研究了超拓扑空间上的超连续函数和超*–连续函数,给出了连续函数（超*–连续函数）和超连续函数之间的关系,并研究了它们的一些性质.2008 年,R.Devi 等人在《On Supra α Open Sets and S α –continuous Functions》[2]中定义了超α开集和超α–连续函数,给出了超开集和超α开集之间的关系,还给出了超α–连续函数和连续函数（超连续函数）之间的关系.2010 年,O.R.Sayed 和 Takashi Noiri 在《On Supra b–open Sets and Supra b–continuity on Topological Spaces》[3]中定义了超 b–开集、超 b–连续映射、超 b–开映射和超 b–闭映射,并研究了它们的一些性质.2018 年,R.Selvaraj 和 S.Chandrasekar 在《Supra*g–Closed Sets in Supra Topological Spaces 》[4]中引进了超*$g$闭集和超*$g$开集并研究了它们的一些性质.在超拓扑空间中,利用这些特殊的集合引进并研究了一些新的函数,那么利用超*$g$闭（开）集是否也能得到一些新的函数之间的关系呢？针对上述问题,本文定义了一些新的映射并研究它们之间的关系.

定义 1[1] 设 X 为非空集,X 上的一个子集族$\mathrm{T}^*_X$称为 X 上的一个超拓扑,如果满足(i)X,$\phi\in \mathrm{T}^*_X$；

(ii)$\mathrm{T}^*_X$中任意多个元素的并集仍在$\mathrm{T}^*_X$中.

称$(X,\mathrm{T}^*_X)$为超拓扑空间,$\mathrm{T}^*_X$中的元素称为超开集,超开集的补集称为超闭集.

## 1 预备知识

定义 2[1]

A 的超闭包定义为$cl^{\mu}(A)=\cap\{B:B$是超闭集且$A\subset B\}$,用$cl^{\mu}(A)$来表示.

A 的超内部定义为$\mathrm{int}^{\mu}(A)=\cup\{B:B$是超开集且$A\supset B\}$,用$\mathrm{int}^{\mu}(A)$来表示.

定义 3[1]

设$(X,\tau)$和$(Y,\sigma)$是两个拓扑空间,$\tau^*$和$\sigma^*$分别是$\tau$和$\sigma$的伴随超拓扑.设$f$为$X\to Y$上的函数,如果 Y 中每个$\sigma^*$–超开集的原象都是 X 中的一个$\tau^*$–超开集,那么$f$是超*–连续函数.

定义 4[4]

设 A 为超拓扑空间$(X,\mu)$的一个子集,如果$A\subseteq cl^{\mu}\left(\mathrm{int}^{\mu}(A)\right)$,称 A 为超半开集.

如果对于$(X,\mu)$中任一包含 A 的超半开集 U,有$cl^{\mu}(A)\subseteq U$,称 A 为超拓扑空间$(X,\mu)$的超$\omega$–闭集,超$\omega$–闭集的补集为超$\omega$–开集.

设$A$为超拓扑空间$(X,\mu)$的一个子集,如果对于$(X,\mu)$中任一包含$A$的超$\omega$–开集$U$,有$cl^{\mu}(A)\subseteq U$,则称$A$为超*$g$闭集.

设$A$为超拓扑空间$(X,\mu)$的一个子集,如果$A^C$是超*$g$闭集,称$A$为超*$g$开集.

## 2 主要结果

定义 5 设$(X,\tau)$和$(Y,\sigma)$是两个超拓扑空间.如果在$Y$中每个超闭集的原象都是$X$中的一个超闭集,那么映射$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$称为超闭连续映射.

定义 6 设$(X,\tau)$和$(Y,\sigma)$是两个超拓扑空间. 如果在$Y$中每个超闭（开）集的原象都是$X$中的一个超*$g$闭（开）集,那么映射$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$称为超*$g$闭（开）连续映射.

引理 1 每个超闭集都是超*$g$闭集.

证明：设$A$是超拓扑空间$(X,\mu)$中任一超闭集,由超闭集的定义可知$cl^{\mu}(A)=A$.对于$(X,\mu)$中任一包含$A$的超$\omega$–开集$U$,于是有$A\subseteq U$,因此$cl^{\mu}(A)\subseteq U$,所以$A$是超*$g$闭集.

定理 1 每一个超闭连续映射都是超*$g$闭连续映射.

证明:设$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$是一个超闭连续映射,A 是 Y 中任意超闭集.根据超闭连续映射的定义可知$f^{-1}(A)$是 X 中的超闭集.由

引理 1 可知每一个超闭集都是超* $g$ 闭集,所以 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的超* $g$ 闭集,因此可知 Y 中每个超闭集的原象都是 X 中的一个* $g$ 超闭集,所以 $f$ 是超* $g$ 闭连续映射.

从下面的例子中说明以上定理的逆命题是不成立的.

例 1 设 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ 是一个超* $g$ 闭连续映射,但不是超闭连续映射.

事实上,设 $X=\{1,2,3\}$, $\tau=\{\phi,X,\{1\},\{1,2\}\}$, $Y=\{1,2,3\}$, $\sigma=\{\phi,Y,\{3\}\}$, $f$ 为 $X\to Y$ 上的映射,其中 $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=2$. 由 $\sigma=\{\phi,Y,\{3\}\}$ 可知 Y 中的超闭集为 Y, $\phi$, $\{1,2\}$, 由于 $f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\phi)=\phi$, $f^{-1}(\{1,2\})=\{1,3\}$,很显然 X, $\phi$ 既是 X 中的超* $g$ 闭集又是超闭集.下证 $\{1,3\}$ 是 X 中的超* $g$ 闭集,不是 X 中的超闭集. 在 X 中, $\{1,3\}\subset\{1,3\}$, $\{1,3\}\subset X$, 因为 $\{2\}\subset\{1,2\}$, $\operatorname{int}^{\mu}(\{1,2\})=\{1,2\}$, $cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{1,2\}))=X$, 所以 $\{1,2\}\subset cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{1,2\}))$,因此 $\{1,2\}$ 是 X 中的超半开集.因为 $cl^{\mu}(\{2\})=\{2,3\}$,由超 $\omega$ –闭集的定义可知 $\{2\}$ 不是 X 中的超 $\omega$ –闭集,所以 $\{1,3\}$ 不是 X 中的超 $\omega$ –开集.因此包含 $\{1,3\}$ 的超 $\omega$ –开集只有 X.由于 $cl^{\mu}\{(1,3)\}=X$,显然 $cl^{\mu}(\{1,3\})\subset X$,由超* $g$ 闭集的定义可知 $\{1,3\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 闭集,综上得出对于 $Y$ 中每个超闭集的原象都是 $X$ 中的一个超* $g$ 闭集,因此 $f$ 为超* $g$ 闭连续映射.但由 $\tau=\{\phi,X,\{1\},\{1,2\}\}$ 可知 $\{1,3\}$ 不是 $X$ 中的超闭集,所以 $f$ 不是超闭连续映射,因此超* $g$ 闭连续映射未必是超闭连续映射.

定义 7 设 $(X,\tau)$ 和 $(Y,\sigma)$ 是两个超拓扑空间. 如果在 $Y$ 中每个超* $g$ 闭集的原象都是 $X$ 中的一个超* $g$ 闭集,那么映射 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ 称为超** $g$ 闭连续映射.

定理 2 每一个超** $g$ 闭连续映射都是超* $g$ 闭连续映射.

证明: 设 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ 是一个超** $g$ 闭连续映射,任取 $Y$ 中的一个超闭集 $A$,由引理 1 每个超闭集都是超* $g$ 闭集可知 $A$ 是 $Y$ 中的超* $g$ 闭集,那么 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的超* $g$ 闭集,因此可知对于 $Y$ 中每个超闭集的原象都是 $X$ 中的一个超* $g$ 闭集,所以 $f$ 是超* $g$ 闭连续映射.

引理 2 每个超开集都是超* $g$ 开集.

证明:在超拓扑空间 $(X,\mu)$ 中,设 $A$ 是任一超开集,则 $A^c$ 是超闭集,由于每个超闭集都是超* $g$ 闭集,所以 $A^c$ 是超* $g$ 闭集,那么 $A$ 是超* $g$ 开集.

从下面的例子中说明超* $g$ 开集未必是超开集.

例 2 设 $X=\{r,s,t\}$, $\tau=\{X,\phi,\{r\},\{r,s\}\}$,下证 $\{s\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 开集,不是 $X$ 中的超开集.由于 $\{r,t\}\subset\{r,t\}$, $\{r,t\}\subset X$, 因为 $\{s\}\subset\{r,s\}$, $\operatorname{int}^{\mu}(\{r,s\})=\{r,s\}$, $cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{r,s\}))=X$,所以 $\{r,s\}\subset cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{r,s\}))$,因此 $\{r,s\}$ 是 $X$ 中包含 $\{s\}$ 的超半开集.因为 $cl^{\mu}(\{s\})=\{s,t\}$,由超 $\omega$ –闭集的定义可知 $\{s\}$ 不是 $X$ 中的超 $\omega$ –闭集,所以 $\{r,t\}$ 不是 $X$ 中的超 $\omega$ –开集.因此包含 $\{r,t\}$ 的超 $\omega$ –开集只有 $X$. 由于 $cl^{\mu}(\{r,t\})=X$,显然 $cl^{\mu}(\{r,t\})\subset X$,由超* $g$ 闭集的定义可知 $\{r,t\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 闭集,因此 $\{s\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 开集.由 $\tau=\{X,\phi,\{r\},\{r,s\}\}$ 可知 $\{s\}$ 不是 $X$ 中的超开集,所以超* $g$ 开集未必是超开集.

定理 3 每一个超*–连续映射都是超* $g$ 开连续映射.

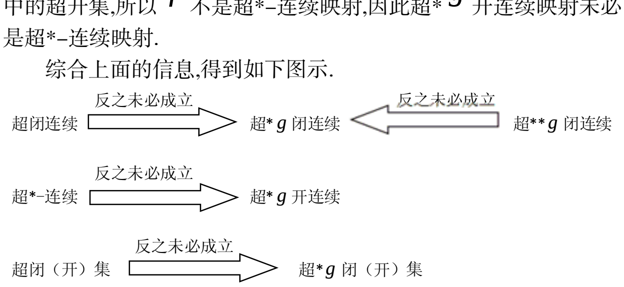
证明:设 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ 是一个超*–连续映射,且 $A$ 是 $Y$ 中的任意超开集,由超*–连续映射的定义可知 $f^{-1}(A)$ 是 $X$ 中的超开集.由引理 2 可知每一个超开集都是超* $g$ 开集,所以 $f^{-1}(A)$ 是 $X$ 中的超* $g$ 开集,于是有对于 $Y$ 中任一超开集的原象都是 $X$ 中的超* $g$ 开集,因此 $f$ 是超* $g$ 开连续映射.

从下面的例子中可以看出以上定理的逆命题是不成立的.

例 3 设 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ 是一个超* $g$ 开连续映射,但不是超*–连续映射.

设 $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{a,b\}\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $\sigma=\{\phi,Y,\{b\}\}$, $f$ 为 $X\to Y$ 上的映射,其中 $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$,很显然 $Y$ 中的超开集为 $Y$, $\phi$, $\{b\}$. 因此 $f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\phi)=\phi$, $f^{-1}(\{b\})=\{b\}$, $X,\phi$ 既为 $X$ 中的超* $g$ 开集又为 $X$ 中的超开集.下证 $\{b\}$ 为 $X$ 中的超* $g$ 开集,不是 $X$ 中的超开集.下证 $\{a,c\}$ 为 $X$ 中的超* $g$ 闭集.在 $X$ 中, $\{a,c\}\subset\{a,c\}$, $\{a,c\}\subset X$, 因为 $\{b\}\subset\{a,b\}$, $\operatorname{int}^{\mu}(\{a,b\})=\{a,b\}$, $cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{a,b\}))=X$, 所以 $\{a,b\}\subset cl^{\mu}(\operatorname{int}^{\mu}(\{a,b\}))$,因此 $\{a,b\}$ 是 $X$ 中包含 $\{b\}$ 的超半开集.因为 $cl^{\mu}(\{b\})=\{b,c\}$,由超 $\omega$ –闭集的定义可知 $\{b\}$ 不是 $X$ 中的超 $\omega$ –闭集,所以 $\{a,c\}$ 不是 $X$ 中的超 $\omega$ –开集.因此包含 $\{a,c\}$ 的超 $\omega$ –开集只有 $X$. 由于 $cl^{\mu}(\{a,c\})=X$,显然 $cl^{\mu}(\{a,c\})\subset X$,由超* $g$ 闭集的定义可知 $\{a,c\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 闭集,因此 $\{b\}$ 是 $X$ 中的超* $g$ 开集.因此得出 $Y$ 中每个超开集的原象都是 $X$ 中的一个超* $g$ 开集,因此 $f$ 为超* $g$ 开连续映射.因为 $\{b\}$ 不是 $X$ 中的超开集,所以 $f$ 不是超*–连续映射,因此超* $g$ 开连续映射未必是超*–连续映射.

综合上面的信息,得到如下图示.




## 3 结语

本文在超拓扑空间上研究若干新的连续映射,得出每一个超闭连续函数都是超* $g$ 闭连续函数,每一个超** $g$ 闭连续函数都是超

* $g$ 闭连续函数,还得出了每一个超*-连续函数都是超* $g$ 开连续函数,对反之不成立的结论构造了例子进行说明.本文的研究为超拓扑空间中的其他类映射的研究提供了思想和理论,并对超拓扑空间中的其他类映射的研究产生了积极的影响.

**参考文献:**

[1]A.S.Mashhour,A.A.Allam,F.S.Mahmmoudand F.H.Khede. On supratopological spaces[J]. Indian Journal of Pure and Mathemates,1983,14(4):502-510.

[2]R.Devi,S.Sampathkumar and M.Caldas. On supra α-open sets and sα-continuous functions[J]. General Mathematics,16(2):77-84.

[3]O.R.Sayed and Takashi Noiri. On supra b-open sets and supra b-continuity on topological spaces[J]. European Journal of Pure and Applied Mathemates,2010,2(3):295-320.

[4]R.Selvaraj and S.Chandrasekar. Supra*g-Closed Sets in Supra Topological Spaces[J]. International Journal of Mathemates Trends and Technology(IJMTT),2018,1(56):679-744.

[5]T.M.AL-Shami. Some results related to supratopological space[J].Journal of Advanced Studies in Topology,2016,7(4):283-294.

[6]D.Andrijevic. On b-open sets[J]. Mat.Vesnik,48(4):59-64.

[7]N.Levine. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces[J]. Amer.Math.Monthly,70(6):36-41.

作者简介：周雪，女，出生于 1995 年，汉族，吉林省长春市人，吉林师范大学 19 级硕士研究生在读，研究方向：一般拓扑学。

*通讯作者：张国芳，女，汉族,出生于 1976 年，吉林省九台市人，博士，教授，硕士生导师，研究方向: 一般拓扑学。

（上接第 263 页）

对外经济体，都需要更多的法律研究。需要更多的法律包括国际法专家发挥才智，给予更多支持。这其中重要的共识应该是：规则一致性是区域经济一体化重要的基础。

最后，由于作者的水平有限，另外是从经济视角反观法律构建，难免有不当和错漏之处，更意在抛砖引玉，期待更多的法律和经济等领域的专家贡献智慧，尤其是在修例风波后的复杂局面下为粤港澳大湾区战略的持续推进提供理论和实践支持。

**参考文献:**

[1] 中共中央、国务院.粤港澳大湾区发展规划纲要[OL].中央人民政府官方网站，
http://www.gov.cn/zhengce/2019-02/18/content_5366593.htm#1，2019

[2] 徐振邦，陈志华.图解香港手册（最新修订版）[M].香港：中华书局（香港）有限公司，2015

[3]王坚.欧盟完全手册[M].北京：中央编译出版社，2010

[4]（英）John Pinder 著.戴炳然译.欧盟概览[M]北京：外语教学与研究出版社， 2009

[5]香港海关.实体货币及不记名可转让票据跨境流动条例[OL].香港法律第 629 章.香港政府一站通官方网站，
https://www.gov.hk/sc/residents/ ，2018

[6]澳门资讯.澳门便览[OL].澳门政府官方网站，
https://www.gov.mo/zh-hant/about-macau-sar/fact-sheet/.2019

[7]柯静嘉.粤港澳大湾区投资合作的法律机制及其构建[J].广东财经大学学报，2018（5）：83-95.

[8]涂泸丹.PPP 模式推行与粤港澳大湾区法制建设[J].农家参谋，2018（24）：261.

[9]邓诗如.大湾区建设需法制先行企业合规不容忽视[J].财经界，2018（9）：93.

[10]王崇. 大湾区立法进路下的法理学思辨与定位[J/OL]. 重庆大学学报(社会科学版).
http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1023.c.20190114.1655.002.html

[11]邹平学，冯泽华.改革开放四十年广东在粤港澳法律合作中的实践创新与历史使命[J].法制社会，2018（5）：6-20.

[12]潘高峰.构建加快推进粤港澳大湾区建设的法治保障[J].湖北经济学院学报（人文社会科学版），2018，15（10）：93-95.

[13]黄志勇.构建粤港澳大湾区的法制合作体系[J].新经济，2017(1):12-13.

[14]吴燕妮.以法治创新推进粤港澳大湾区战略下的深港融合[N].深圳特区报,2019-6-25-C02.

[15]张淑钿.粤港澳大湾区城市群建设中的法律冲突与法律合作[J].港澳研究，2017（3）：17-25.

[16]张亮,黎东铭.粤港澳大湾区的立法保障问题[J].地方立法研究，2018，3（4）：21-27.

[17]朱孔武.粤港澳大湾区跨域治理的法治实践[J].地方立法研究，2018，3（4）：3-10.

[18]朱最新.粤港澳大湾区区域立法的理论建构[J].地方立法研究，2018，3（4）：11-19.

[19] 叶一舟.粤港澳大湾区协同立法机制建设刍议[J].地方立法研究，2018，3（4）：37-45.

[20]全国人民代表大会.中华人民共和国立法法[OL]. 中国人大网，中国法律法规信息库.
http://law.npc.gov.cn:8081/FLFG/flfgByID.action?flfgID=34759708&keyword=&zlsxid=01，2019

[21]程恩富，任传普.香港修例风波的政治经济根源分析[J].管理学刊.2019,12(6)：1-7.

作者简介：1、陈世清（第一作者），华南农业大学林学与风景园林学院教授，硕士研究生导师，广东广州，510642

2、葛俊明，独立学者，大健康国际集团公司秘书。广东深圳，518033；