泰勒公式的一种新的教学方法

姜雄　魏丽光

（辽宁科技学院　辽宁本溪　117004）

摘要：在高等数学中泰勒公式的教学是一个重点，对本科生学习来说是一个难点。对高等数学教师的教学是一个重点。本文从泰勒公式的历史、发展和应用出发，说明泰勒公式的重要性。针对泰勒公式教学的难度和重要性，从一种新的角度讲授泰勒公式，进而到达学生对泰勒公式的深度理解和熟练应用。

关键词：泰勒公式；导数特征；泰勒中值定理；柯西中值定理

1、泰勒公式的简介

泰勒公式得名于英国数学家布鲁克·泰勒（Brook Taylor），他在 1712 年首次叙述了这个泰勒公式。Taylor 公式是为了研究复杂函数性质时经常使用的重要近似方法之一，也是基础微积分学中的一项重要内容。

Taylor 公式也是工科高等数学中的一个非常重要的内容，它将一些复杂的函数逼近近似地表示为简单的多项式函数，泰勒公式这种化繁为简的功能，使得它成为分析和研究许多数学问题的有力工具。

18 世纪早期英国牛顿学派最优秀的代表人物之一的数学家泰勒(Brook Taylor)，其主要著作是 1715 年出版的《正的和反的增量方法》，书中陈述了他于 1712 年 7 月给他老师梅钦信中提出的著名定理——泰勒定理。1717 年,泰勒用泰勒定理求解了数值方程。泰勒公式是从格雷戈里——牛顿插值公式发展而来，它是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。如果函数足够光滑,在已知函数某一点各阶导数的前提下,泰勒公式可以利用这些导数值作为系数构建一个多项式来近似该函数在这一点的邻域中的值。1772 年，拉格朗日强调了泰勒公式的重要性，为微分学基本定理之一，但是泰勒定理的证明中并没有考虑级数的收敛性，这个工作直到 19 世纪 20 年代，才由柯西完成。泰勒定理开创了有限差分理论，使任何单变量函数都可以展开成幂级数，因此，人们称泰勒为有限差分理论的奠基者 。

泰勒公式也是数学专业中《数学分析》中重要的内容，也是研究函数极限和估计误差等方面不可或缺的数学工具，泰勒公式集中体现了微积分“逼近法”的精髓，在近似计算上有独特的优势。利用泰勒公式可以将非线性问题化为线性问题，且具有很高的精确度，因此其在微积分的各个方面都有重要的应用。泰勒公式可以应用于求极限、判断函数极值、求高阶导数在某点的数值、判断广义积分收敛性、近似计算、不等式证明等方面。

2、泰勒公式的教学难度

泰勒公式不仅在数学运用中有难度，而且在数学教学上也有难度。本科生在刚学习了导数，就引入泰勒公式，无论从公式内容，还是证明，以及应用都是难以接受。一般的授课方法:直接给出泰勒公式内容，然后直接证明。

我们从不断实践的高等数学教学研究中，采用首先介绍泰勒公式来源、历史和作用，然后从拉格朗日中值定理的几何意义，导数的几何意义，函数图形的性质引入泰勒公式的形式，然后证明。

3、泰勒公式的设定

众所周知，函数的曲线形状与函数的导数是相关的。假设两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，若它们在 x_0 处的函数值 $f(x_0)=g(x_0)$，并且它们在 x_0 处的导数均为 1，即 $f'(x_0)=g'(x_0)=1$，那么这两个函数在 x_0附近 有三这种情况：（1）均在 x_0 处切线的上方，（2）均在 x_0 处切线的下方，（3）在 x_0 处切线的两侧。再假设在 x_0 处二阶导数 $f''(x_0)=g''(x_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 处同时凹或凸，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 附近的形状很接近。

若 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 两个函数在某点处的函数值相同、一阶导数值相同、二阶导数值相同、...n 阶导数值相同，那么这两个函数的图形应该很相近。

若有两个函数的函数值非常接近，我们就可以用一个函数近似表示另一个函数，即要想近似表达 $f(x)$，则可以建立一个新函数 $g(x)$，取近似表达 $f(x)$，

而且，我们还可以给出两个函数之间的误差。

如何建立一个具有 n 阶导数的函数 $g(x)$，并且使得函数 $g(x)$ 在某一点的函数值、一阶导数值、二阶导数值、...n 阶导数值都与已知函数 $f(x)$ 相同?

首先，需要用到 n 次多项式，因为 n 次多项式在某一点的函数值、一阶导数值、二阶导数值、...n 阶导数值可以任意设定。所以我们设定在 x_0 点处的函数值相同、一阶导数值相同、二阶导数值相同、...n 阶导数值相同的函数 $p_n(x)$，然后通过柯西中值定理我们计算出误差。这就是泰勒公式的设定。

总体思路：就是寻找一个多项式来近似表示一个复杂函数，并且给出误差。

例如，对具有无穷阶导数的 e^x，可以用这个 n 次多项式近似表达出来，并且给出误差：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 表示误差。

4、多项式 $p_n(x)$ 的设立

4.1 幂函数的导数特征

观察 $(x)'=1,\left(\frac{x^2}{2!}\right)''=1,\left(\frac{x^3}{3!}\right)'''=1\dots$

当 n 为正整数时，有 $\left(\frac{x^n}{n!}\right)^{(n)}=1$ 或 $\left(\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right)^{(n)}=1$ 这个式子我们称为幂函数的导数特征。

4.2、 $p_n(x)$ 的数学表示

根据幂函数的导数特征有：

$$\left[f'(x_0)(x-x_0)\right]=f'(x_0)(x-x_0)'=f'(x_0)$$

$$\left[f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]''=f''(x_0)\left[\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]''=f''(x_0)$$

$$\left[f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right]'''=f'''(x_0)\left[\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right]'''=f'''(x_0)$$

你会发现 $\left[f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right]''$ 在 $x=x_0$ 的函数值为0

$$\left[f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right]^{(4)}=0$$

所以

$p_3(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)_3}{3!}$

显然有 $p_n(x_0)=f(x_0)$

$p_n'(x_0)=f'(x_0)$

$p_n''(x_0)=f''(x_0)$

$p_n'''(x_0)=f'''(x_0)$

将上述过程一般化：设立一个多项式 $p_n(x)$，来近似表示 $f(x)$。

设函数 $f(x)$ 可导，且有(n+1)阶导数，在 x_0 的各阶导数值为

$f'(x_0), f''(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0), f^{(n+1)}(x_0)$

则可以设立 $p_n(x)$。

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

显然有 $p_n(x_0)=f(x_0)$

$p_n'(x_0)=f'(x_0)$

$p_n''(x_0)=f''(x_0)$

… …

$p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$

$p_n^{(n+1)}(x_0)=0$

显然，拉格朗日中值定理就是泰勒公式的低级形式。

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0),\quad (x_0<\xi<x)$$

可以写成：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), \lim_{x\to x_0} o(x-x_0)=0$$

但在实践中，近似计算中往往不够精确

泰勒公式的几何意义是利用多项式函数来逼近原函数，由于多项式函数可以任意次求导，易于计算，且便于求解极值或者判断函数的性质，因此可以通过泰勒公式获取函数的信息，同时，对于这种近似，必须提供误差分析，来提供近似的可靠性。

5、误差的确定

由于在上述的函数的设定，

当 $x=x_0$ 时，$p_n(x_0)=f(x_0)$

当 $x\neq x_0$ 时，$p_n(x_0)\approx f(x_0)$

规定：

$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$

所以有：

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x).$$

当 $x=x_0$ 时，$p_n(x_0)=f(x_0)$，$R_n(x)=0$

当 $x\neq x_0$ 时，$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 误差如何？

由此，我们引入泰勒中值定理：

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x\in(a,b)$ 有，

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x).$$

其中，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(x_0<\xi<x)$$

证明：根据定理内容，只需证明：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(x_0<\xi<x)$$

为了证明上式，引入辅助函数：

$G_n(x)=(x-x_0)^{n+1}$，$R_n(x)=f(x)-q_n(x)$

显然有：

$G_n^{(n+1)}(x)=(n+1)!, G_n(x_0)=G_n'(x_0)=G_n''(x_0)=\ldots=G_n^{(n)}(x_0)=0$

$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$R_n'(x)=f'(x)-p'(x)$

$R_n''(x)=f''(x)-p''(x)$

……

$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-p^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0=f^{(n+1)}(x)$

对上面的两个函数连续运用柯西中值定理，有：

$$\frac{R_n(x)}{G_n(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{G_n(x)-G_n(x_0)}=\frac{R_n(\xi_1)}{G_n(\xi_1)},(x_0<\xi_1<x)$$

$$\frac{R_n'(x)}{G_n'(x)}=\frac{R_n'(x)-R_n'(x_0)}{G_n'(x)-G_n'(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_2)}{G_n'(\xi_2)},(x_0<\xi_2<\xi_1)$$

……

$$\frac{R_n^{(n)}(x)}{G_n^{(n)}(x)}=\frac{R_n^{(n)}(x)-R_n^{(n)}(x_0)}{G_n^{(n)}(x)-G_n^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{G_n^{(n+1)}(\xi)},(x_0<\xi<\xi_n)$$

$$\frac{R_n(x)}{G_n(x)}=\frac{R_n'(x)}{G_n'(x)}=\cdots=\frac{R_n^{(n)}(x)}{G_n^{(n)}(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{G_n^{(n+1)}(\xi)}$$

$$\therefore R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{G_n^{(n+1)}(\xi)}G_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

证毕。

6、泰勒公式的几点说明

（1）多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 次泰勒多项式。

（2）$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$

称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的带有余项 n 次泰勒公式。

其中，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为拉格朗日余项。

(3)若不需要精确误差表达式的情况下，可以写成：

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+o[(x-x_0)^n]$$

称为带有亚诺余项型的 n 阶泰勒公式。

（4）上式中，若令 $x_0=0$，则 $\xi=\theta x,(0<\theta<1)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-x_0)+f''(0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为带有拉格朗日余项型麦克劳林公式。

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-x_0)+f''(0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+o(x^n)$$

称为带有亚诺余项型麦克劳林公式。

7、泰勒公式的应用

在高等数学的理论研究及应用实践中,泰勒公式有着十分重要的应用，在高等数学教学之中，简单归纳如下：

(1)应用泰勒中值定理(泰勒公式)可以证明中值等式或不等式命题

(2)应用泰勒公式可以证明区间上的函数等式或不等式

(3)应用泰勒公式可以进行更加精密的近似计算

(4)应用泰勒公式可以求解一些极限

(5)应用泰勒公式可以计算高阶导数的数值

7.1 函数展开成带有余项的麦克劳林公式

例 1、将展 $f(x)=e^x$ 开成带有拉格朗日余项型的麦克劳林公式

解:

$\therefore f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

7.2 运用带有亚诺余项型的麦克劳林公式求极限

例 2、$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

解：$\because \sin^3 x \sim x^3 (x \to 0)$

运用带有亚诺余项的三阶麦克劳林公式表示如下：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^3)$$

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) = \frac{x^3}{3} - o(x^3)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x_3}{3} - o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

7.3、计算误差与精确度

例 3、估计下面近似公式的误差

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, 当 0 \le x \le 1$$

解：由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \le x \le 1$, 得

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \right| \le \frac{3}{8}$$

于是，当 $0 \le x \le 1$ 时，$|R_3(x)| \le \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16}$

例4、计算 $\log_{10} 11$ 精确到 10^{-5}

解：$\log_{10} 11 = 1 + \log_{10}(1 + 0.1), R_n < \frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}$

当 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1} < 10^{-5}$, 只需要 $n \ge 4$.

$$\log_{10} 11 \approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139$$

最后说明，泰勒公式的教学方法多种多样，就像高等数学的教学也没有固定的方法，做为一名高等数学教师，应该掌握深入研究高等数学教材和辅助资料，从各个角度来了解研究每一个知识点的来源、发展、应用，才能更好的引入它的概念，加深概念的理解，深度挖掘特的内在因素，从而运用合适的教学方法，使得高等数学教学更加流畅的完成。

参考文献：

[1]同济大学数学系 《高等数学》[M]高等教育出版社 2013 年第 6 版

[2]同济大学数学系 《高等数学附册学习辅导》[M]高等教育出版社 2011 年

[3]上海交通大学数学组《高等数学》[M] 上海大学出版社 2017 年 1 月

[4]M.克莱因 《古今数学思想》[M] 上海科技出版社 2009 年 10 月

作者简介：姜 雄：男，（1968.9－）辽宁本溪人，辽宁科技学院副教授。研究方向：高等数学教学。

魏丽光：女（1971.9－）辽宁本溪人，硕士，辽宁科技学院讲师。研究方向：高等数学教学。

本文为辽宁科技学院教学改革项目：《工科数学》的教学改革与探索

（上接第 7 页）

束。我们还应该再回到“事”的里边去检验。检验这些设计活动是否符合儿童的心理健康、身体健康，是否合乎人们的情理和价值标准。

在以往的幼儿园空间设计中，设计师可以仅仅凭借自己多年累积的设计经验对该项目中这个年龄段儿童的生活、玩耍、学习进行细致的观察，凭借自己的设计经验和个人知识去发现问题，解决问题。但是随着时代的发展，现在面临的问题更为复杂。因此就需要更为专业的方法去应对新的问题。

在内部因素的组织中，我们需要专业的知识、经验、创造性、灵感、直觉等。在研究某一项目方案时，不能只做一个简单的分析，一次两次的研究。每一次分析与研究，都会增加对儿童和其承载环境的理解，同时也对设计提供了依据、知识资源，增加了设计的总量。通过这些研究，有助于我们对设计“细节”的把控。

“事”是一个关系场，特定的时间、空间内与物或他人发生着“行为互换”与“信息交换”。

“物”泛指材料、设备或产品，“事”则是人与物发生的关系。人为事物是指人创造事物的过程。通过 “事”所设计出来的“物”可以匹配人类的适当需求，可以很好满足使用者的欲望。人就是通过“事”来发生关系的，人与“物”并不会直接发生关系。

比如，一个孩子拿着画笔去画画这时的画笔可以称为画笔，当笔脱离了画画这个活动，画笔就成为不了画笔了。因此，我们在设计幼儿园时，脱离了人为造物，而不理解事物之间的内在联系，就会违背设计的本意和初衷。

从事理学的角度去进行幼儿园的设计，设计就不单单的是一个制作设计方案、施工图、效果图的技术活动。它可以把设计提升为一种文化活动。这种文化活动，可以创造出更为合理的空间使用方式。

有些幼儿园苛于追求某一种设计风格，而偏离了设计的初衷，走向了一种极端。比如把儿童空间设计成一种中式的风格，空间中运用了大量的原木色，使空间中的色彩表现很少，在孩子需要色彩感官的刺激时候，却失去了这样的机会。又或许是把空间中的色彩运用的过多，且不注意色彩搭配，整个室内空间没有协调性、主体性和衬托性的关系，刻意的想吸引儿童的注意力，但却给不了儿童在色彩上的舒适感，整个空间中也会因此显得杂乱无章。

设计并不是一成不变的，特别是在幼儿园空间设计中，普适性的设计似乎很难成立。因为不同年龄段、不同地区、不同家庭背景的儿童，会有不同的行为方式和价值系统。从这些角度出发来考虑儿童空间中的设计思路。这就需要从整体的角度去确定方案周边儿童的特点和使用需求。

可以先进行市场调查，仔细研究项目所在的附近小区父母的文化程度和消费水平。比如通过问卷调查的方式进行归类和整理，分析孩子的父母是所在城市的上班族、或者无文化背景进城务工人员、又或者是拥有高等教育的海归等等。

这样的方式可以归类不同的家长在社会、文化中的具体位置，所归属的群体类型，分析周围的“事”，也就得到了这些“生活方式”。使自己的设计作品与周边环境相匹配和配套。通过这些情景，对父母的期望需求进行分类和整理为后续的设计方案提供支撑。

结语：在幼儿园的空间设计中，设计师应当遵循主体性的设计原则，了解幼儿园在当前城市环境中的主体地位。把控好空间中的主体关系，设计出一个满足儿童生理、心理需要的健康环境。通过“事”来创设出的幼儿园空间，一定会使设计出来的空间与儿童更加匹配，也更和谐。

参考文献：

[1]何莉娥, 董灵.基于设计事理学的亲子互动类儿童学习家具设计研究[J].工业设计,2021,(09):60－62.

[2]唐林涛. 设计事理学理论、方法与实践[D]. 清华大学, 2004.

[3]沈伟. 基于儿童空间认知的幼儿园空间设计研究[J]. 家教世界, 2021(09):56－57.

[4]张玉峰. 设计中的“身体规训”与“身体自主”——以幼儿园空间设计为例[J]. 美术大观, 2021(03):124－125.