B^2到B^7的一类逆紧全纯单项式

丁思敏

（吉林师范大学 数学学院　吉林四平　136000）

摘要：本文根据已有的B^2到B^4单项式逆紧映照等价类，利用张量积构造新的高维逆紧全纯映照的显式表达式，并应用逆紧全纯映照的定义对其进行验证.

关键词：逆紧；单项式；张量积

一直以来，数学家们对逆紧全纯映照这一课题有着浓厚的兴趣，二十世纪八十年代，S.Webster、J.Faran 、J.A.Cima 和 Suffridge 在该领域先后取得了突破性进展. 1977 年，H.Alexander 证明了维数大于 1 时，复空间 X^n 中单位球 B^n 到 B^n 的逆紧全纯映照是 B^n 上的自同构. 1979 年，S.Webster 考虑了不同维复空间中单位球间的逆紧全纯映照的几何结构，证明了具有 3 次连续可微边界的 B^n 到 $B^{n+1}(n>2)$ 的逆紧全纯映照是线性嵌入. 结合 J.Faran 及 F.Forstneric 的研究结果，总结出具有 $(N-n+1)$ 次连续可微边界的 B^n 到 $B^N(N<2n-2)$ 的逆紧全纯映照，等价于线性嵌入[6]. 到了二十一世纪，数学家们对此课题又有了进一步的研究. 2001 年 X.Huang 和 S.Ji 发现，当 $n\geq 3$ 时，具有二次连续可光滑边界的 B^n 到 B^{2n-1} 的逆紧全纯映照等价于线性映照或 Whitney 映照[3]. 2005 年，在 Hamada 工作的基础上，X.Huang, S.Ji 和 D.Xu 证明当 $N\in(2n,3n-3),n\geq 4$ 时，任意 B^n 到 B^N 上的逆紧全纯有理映照等价于形式 $(g,0')$ 的映照.直到 2018 年,S.Ji 和 W.Yin 给出当 N 为间隙区间上的边界点时，单位球间逆紧全纯有理映照的等价情况[4].

1 定义

1.1 全纯函数[5]

定义 1.1.1 设 X 为复平面，$X^n=\{(z_1,\cdots,z_n):z_i\in X,i=1,\cdots,n\}$ 为 $n(n>1)$ 维复线性空间.X^n 中的连通开集 Ω 称为域，当 Ω 有界时称为有界域.

定义 1.1.2 设 Ω 是 X 中的域，若复值函数 $f:\Omega\to X$ 在点 z_0 的某一邻域内可导，则称 f 在点 z_0 解析.

定义 1.1.3 设 Ω 是 X 中的域，若复值函数 $f:\Omega\to X$ 在 Ω 内每一点都解析，则称 f 在 Ω 内解析，f 是 Ω 内的一个解析函数，也叫全纯函数.

定义 1.1.4 设 Ω 是 X^n 中的域，函数 $f:\Omega\to X$ 是连续可微的，若对 X^n 中每一点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，都有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0(j=1,\cdots,n)$，则称 f 是 Ω 上的全纯函数.

1.2 全纯映照[5]

设映照 $f=(f_1,\cdots,f_m):X^n\to X^m$ 是连续可微的，若对 X^n 中每一点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 都有 $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_i}=0(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则称 f 是全纯映照.

1.3 逆紧映照[6]

设 X,Y 是拓扑空间，一个连续映照 $f:X\to Y$ 是逆紧的,当且仅当对于任何紧集 $K\subset Y$, $f^{-1}(K)$ 在 X 中是紧的.

1.4 逆紧全纯映照[6]

设 Ω,Ω' 是有界域,设映照 $f:\Omega\to\Omega'$ 是全纯的，且是逆紧的，则 $f:\Omega\to\Omega'$ 是逆紧全纯的.

1.5 逆紧全纯有理映照[10]

设 Ω 是 X^n 中的域，Ω' 是 X^m 中的域，$f:\Omega\to X^n\to\Omega'\to X^m$ 是一个逆紧全纯映照，若它可以写成 P/q 的形式，P 和 q 都是逆紧全纯多项式映照，则称其为逆紧全纯有理映照.

1.6 张量积[7]

设 Ω 是 X^n 中的域，映照 $f:\Omega\to X^n$ 和 $g:\Omega\to X^N$ 均是全纯映照，定义 f 与 g 的张量积为 $f\otimes g=(f_1g_1,f_2g_1,\cdots,f_ng_1,f_1g_2,\cdots,f_ng_N)$.

2 定理

2.1 引理[10]

设 Ω,Ω' 是有界域，全纯函数 $f:\Omega\to\Omega'$ 是逆紧的，当且仅当序列 $\{z_k\}\to\partial\Omega$ 时，序列 $\{f(z_k)\}\to\partial\Omega'$.

证明 $\Leftarrow$ 如果序列条件不成立，则存在子序列 $\{f(z_k)\}$ 收敛到 Ω' 内一点 $\{f(z_k)\}$.

和它的极限值构成 Ω' 的紧子集. $\{f(z_k)\}$ 的逆像是 $\{z_k\}$ 的子序列，并趋于 $\partial\Omega$ 因此,紧子集的逆像不是紧集，故逆紧的定义知，映照 f 不是逆紧映照. 矛盾. 因此,若全纯映照 $f:\Omega\to\Omega'$ 是逆紧的，则序列 $\{z_k\}\to\partial\Omega$，序列 $\{f(z_k)\}\to\partial\Omega'$.

$\Rightarrow$ 假设 k 是 Ω' 内的紧集，由连续性知，$f^{-1}(K)$ 是闭的，为了证明紧致性，只需要再证明 $f^{-1}(K)$ 是有界的. 反之，在 $f^{-1}(K)$ 内找到序列 $\{z_k\}$，并且其趋于 $\partial\Omega$.设 $\{f(z_k)\}$ 位于紧集 K 内，从而 $\{f(z_k)\}$ 有界. 与 $\{f(z_k)\}$ 趋于 $\partial\Omega'$ 矛盾.因此，当序列 $\{z_k\}\to\partial\Omega$，序列 $\{f(z_k)\}\to\partial\Omega'$ 时，则 $f^{-1}(K)$ 一定是紧的，所以 f 是逆紧映照.

2.2 定理[8]

设 $f:B^2\to B^4,g:B^2\to B^4$ 是逆紧全纯映照，设 f 的值域有直和分解 $B^4=A\oplus A^{\perp}$. 设 $\dim B^4=4,\dim A=a,\dim A^{\perp}=4-a$. 则 $E(A,g)(f)=(f_A\otimes g)\oplus f_{A^{\perp}}$ 为 B^2 到 B^{3a+4} 的逆紧全纯映照，其中 $1\leq a\leq 3$.

2.3 引理[8]

设 Ω 是 X^n 中的有界域. $f:\Omega\to B^n,g:\Omega\to B^M$ 是逆紧全纯映照,

设 f 的值域有直和分解 $B^N = A \oplus A^{\perp}$.设 $\dim A = a, \dim A^{\perp} = N - a, \dim B^N = N, \dim B^M = M$. 则 $E(A,g)(f) = (f_A \otimes g) \oplus f_{A^{\perp}}$ 为 Ω 到 $a(M-1)+N$ 维单位球的逆紧全纯映照.其中 $1 \le a \le N-1$.

证明　$E(A,g)(f) = (f_A \otimes g) \oplus f_{A^{\perp}}$ 为全纯映照，现在只需证明映照 E 是逆紧的即可. 令 Ω 中一点 $z \to \partial\Omega$. 因为 g 是逆紧的，所以 $|g|^2 \to 1$.

由 $|E|^2 = |f_A \otimes g|^2 + |f_{A^{\perp}}|^2 = |f_A|^2 |g|^2 + |f_{A^{\perp}}|^2$ 可知，$|E|^2$ 与 $|f_A|^2 + |f_{A^{\perp}}|^2 = |f|^2$ 有相同的极限. 又因为 f 是逆紧的，所以 $|E|^2 \to 1$, 从而 E 是逆紧的.

因为 B^N 是 X^n 中的有界域，所以引理 2.3 可变为:

设 $f: B^n \to B^N, g: B^n \to B^M$ 是逆紧全纯映照，设 f 的值域有直和分解 $B^N = A \oplus A^{\perp}$.设 $\dim A = a, \dim A^{\perp} = N-a, \dim B^N = N, \dim B^M = M$.则 $E(A,g)(f) = (f_A \otimes g) \oplus f_{A^{\perp}}$ 为 B^n 到 $B^{a(M-1)+N}$ 的逆紧全纯映照，其中，$1 \le a \le N-1$.

2.4 定理[9]

单项式逆紧映照 $f: B^2 \to B^4$ 等价于下述的其中之一:

$(z, w, 0, 0)$;

$(z^2, zw, w, 0)$;

$(z^2, \sqrt{2}zw, w^2, 0)$;

$(z^3, \sqrt{3}zw, w^3, 0)$;

$(z^3, \sqrt{3}z^2w, \sqrt{3}zw^2, w^3)$;

(z^3, z^2w, zw, w);

(z^2, z^2w, zw^2, w);

$(z^2, \sqrt{2}z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^2)$;

$(z^3, \sqrt{3}z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^2)$;

$(z, z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^3)$;

$(z^4, z^3w, \sqrt{3}zw, w^3)$;

$(z^4, \sqrt{3}z^2w, zw^3, w)$;

$(z^5, \sqrt{5}z^3w, \sqrt{5}zw^2, w^5)$;

$(z, \cos\theta w, \sin\theta zw, \sin\theta w^2)$;

$(z^2, \sqrt{1+\cos^2\theta}zw, \cos\theta w^2, \sin\theta w)$ 其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

3 构造

根据定理 2.4, 利用 B^2 到 B^4 的逆紧全纯映照，我们构造出部分 B^2 到 B^7 的逆紧全纯映照. 设 $f(z,w) = (z, w, 0, 0)$, 选取由 $(1,0,0,0)$ 生成的子空间作为 A 来分解 f，利用上述 B^2 到 B^4 的逆紧全纯映照的显式表达式，并利用 $E(A,g)(f) = (f_A \otimes g) \oplus f_{A^{\perp}}$ 进行计算，得到

(1)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, zw, w, 0)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_1 = (z^3, z^2w, zw, 0, w, 0, 0)$;

(2)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, \sqrt{2}zw, w^2, 0)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_2 = (z^3, \sqrt{2}z^2w, zw^2, 0, w, 0, 0)$;

(3)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, \sqrt{3}zw, w^3, 0)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_3 = (z^3, \sqrt{3}z^2w, zw^3, 0, w, 0, 0)$;

(4)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, \sqrt{3}z^2w, \sqrt{3}zw^2, w^3)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_4 = (z^3, \sqrt{3}z^3w, \sqrt{3}z^2w^2, zw^3, w, 0, 0)$;

(5)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^3, z^2w, zw^2, w)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_5 = (z^4, z^3w, z^2w^2, zw, w, 0, 0)$;

(6)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, z^2w, zw^2, w)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_6 = (z^3, z^3w, z^2w^2, zw, w, 0, 0)$;

(7) 当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, \sqrt{2}z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^2)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_7 = (z^3, \sqrt{3}z^3w, \sqrt{3}z^2w^2, zw^3, w, 0, 0)$;

(8)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^3, \sqrt{3}z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^2)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_8 = (z^4, \sqrt{3}z^3w, \sqrt{2}z^2w^2, zw^2, w, 0, 0)$;

(9)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z, z^2w, \sqrt{2}zw^2, w^3)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_9 = (z^2, z^3w, \sqrt{2}z^2w^2, zw^3, w, 0, 0)$;

(10) 当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^4, z^3w, \sqrt{3}zw, w^3)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_{10} = (z^5, z^4w, \sqrt{3}z^2w, zw^3, w, 0, 0)$;

(11) 当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^4, \sqrt{3}z^2w, zw^3, w)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_{11} = (z^5, \sqrt{3}z^3w, z^2w^3, zw, w, 0, 0)$;

(12)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^5, \sqrt{5}z^3w, \sqrt{5}zw^2, w^5)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_{12} = (z^6, \sqrt{5}z^4w, \sqrt{5}z^2w^2, zw^5, w, 0, 0)$;

(13)当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z, \cos\theta w, \sin\theta zw, \sin\theta w^2)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_{13} = (z^2, \cos\theta zw, \sin\theta z^2w, \sin\theta zw^2, w, 0, 0)$;

(14) 当 $f(z,w) = (z,w,0,0), g(z,w) = (z^2, \sqrt{1+\cos^2\theta}zw, \cos\theta w^2, \sin\theta w)$ 时

有 $E(A,g)(f) = l_{14} = (z^3, \sqrt{1+\cos^2\theta}z^2w, \cos\theta zw^2, \sin\theta zw, w, 0, 0)$.

证明　为了验证这个映照是 ∂B^2 到 ∂B^7 的映照，只需证当 $|z|^2 + |w|^2 = 1$ 时，有 $|E|^2 = 1$ 成立，由于表达式较多，现证明 l_1, l_3, l_{11}, l_{13} 进行证明，其余证明同理可证.

(1)由 $|z|^2 + |w|^2 = 1$ 得到

$$|E|^2 = |z^3|^2 + |z^2w|^2 + |zw|^2 + 0 + |z^2w|^2 + |zw^2|^2 + |w^2|^2 + 0$$
$$= |z|^6 + |z|^4|w|^2 + |z|^2|w|^2 + |z|^4|w|^2 + |z|^2|w|^4 + |w|^4$$
$$= |z|^4(|z|^2 + |w|^2) + |z|^2|w|^2 + |z|^2|w|^2(|z|^2 + |w|^2) + |w|^4$$
$$= |z|^4 + 2|z|^2|w|^2 + |w|^4$$

$=(|z|^2+|w|^2)^2$

$=1$

所以该映照是∂B^2到∂B^7的映照，即$l_2(z,w)$是逆紧的.

（2）由$|z|^2+|w|^2=1$得到

$$|E|^2=|z^3|^2+|z^3w|^2+|z^2w^2|^2+|zw|^2+|w|^2$$
$$=|z|^6+|z|^6|w|^2+|z|^4|w|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^6+|z|^4|w|^2(|z|^2+|w|^2)+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^6+|z|^4|w|^2+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^2+|w|^2$$
$$=1$$

所以该映照是∂B^2到∂B^7的映照，即$l_3(z,w)$是逆紧的.

（3）由$|z|^2+|w|^2=1$得到

$$|E|^2=|z^5|^2+|\sqrt{3}z^3w|^2+|z^2w^3|^2+|zw|^2+|w|^2$$
$$=|z|^{10}+3|z|^6|w|^2+|z|^4|w|^6+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^{10}+3|z|^6|w|^2(|z|^2+|w|^2)+|z|^4|w|^6+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^8+2|z|^8|w|^2+2|z|^6|w|^4+|z|^4|w|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^8+2|z|^6|w|^4+|z|^4|w|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^6+|z|^4|w|^2+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^2+|w|^2$$
$$=1$$

所以该映照是∂B^2到∂B^7的映照，即$l_{11}(z,w)$是逆紧的.

（4）由$|z|^2+|w|^2=1$得到

$$|E|^2=|z^2|^2+|\cos\theta zw|^2+|\sin\theta z^2w|^2+|\sin\theta zw^2|^2+|w|^2$$
$$=|z|^4+\cos^2\theta|z|^2|w|^2+\sin^2\theta|z|^4|w|^2+\sin^2\theta|z|^2|w|^4+|w|^2$$
$$=|z|^4+\cos^2\theta|z|^2|w|^2+\sin^2\theta|z|^2|w|^2(|z|^2+|w|^2)+|w|^2$$
$$=|z|^4+\cos^2\theta|z|^2|w|^2+\sin^2\theta|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^4+|z|^2|w|^2+|w|^2$$
$$=|z|^2+|w|^2$$
$$=1$$

所以该映照是∂B^2到∂B^7的映照，即$l_{13}(z,w)$是逆紧的.

参考文献：

[1] J. Faran. The linearity of proper holomorphic maps between balls in the low codimension case [J]. J. Diff.Geom.,1986,24(01):15−17.

[2] F. Forstneric. Proper holomorphic maps from balls [J]. Duke Math. 1986,53(2): 427−441.

[3]X. Huang and S. Ji. Mapping B^n into B^{2n-1}[J].iInvent.Math.,2001,145(2):219−250 .

[4]S. Ji and W. Yin, Upper boundary points of the gap intervals for rational maps between balls[J]. the Asian Journal of Math., 2018,22 (3):493−506.

[5]史济怀.多复变函数论基础[M]. 北京：高等教育出版社,2014.

[6]J. Faran. Maps from the two ball to the three ball [J]. Invent. Math., 1982,68(03): 441−475.

[7]J.P.D’Angelo.Proper holomorphic mappings between balls of different dimensions[J]. Mich.Math.J., 1988,35:83−90.

[8]J.P. D’Angelo. Several complex variables and the geometry of real hypersurfaces [M]. CRCPress: FL, 1993.

[9]J.P. D’Angelo. Proper holomorphic mappings between balls of different dimensions[J]. Mich.Math.J., 1988,35:83−90.

[10]Rudin.W. Function theory in the unit ball of C^n [M]. Springer,1980.

[11]涂振汉.多元复分析[M].北京:科学出版社,2014.

[12]S.JiandW.Yin,Upper boundary points of the gap intervals for rational maps between balls[J].theAsianJournalofMath.,2018,22(3):493−506.