

HPM 视角下高中数学与数学文化有机融合的方法

——以湘教版高中数学《余弦定理》为例

吴建军¹ 刘晶² 闫婷婷³

(1. 甘肃省兰州大学附属中学(兰州 33 中) 730000; 2. 甘肃省兰州市第五中学 730000; 3. 甘肃省兰州市第十二中学 730000)

摘要:从目前高中数学教与学的活动中发现,高中数学课堂中存在着数学文化与数学文化教育缺失的现象,怎样处理高中数学课堂与数学文化有机融合是值得一线高中教育工作者研究的核心问题。本文以高中数学中的余弦定理为例,通过对数学文化在目前高中数学课堂中渗透策略的分析,提出如何实现高中数学课堂与相关数学史料的有机融合策略。

关键词: HPM, 数学课堂教学, 有机融合策略, 余弦定理

前言

高中数学教学的重要任务之一就是让学生了解数学知识产生的背景,而数学文化课程可以让学生透过数学历史对数学的基本概念、数学思想和方法的发生、发展有一个更深层次的总的认识。同时对于学生的初等数学的知识体系的有所发展,使学生站在数学文化的背景下学习数学,培养学生的数学核心素养,为进一步学习高等数学奠定基础。

尽我们所知,目前学术界的相关研究主要着眼于粗放式地整合数学文化与数学课堂教育等比较宏观的层面,鲜有研究文献从预设“数学课堂中核心素养和数学文化有机融合”这一全新的视角着力,以高中阶段主要的数学思想和方法为主线融合传统数学文化文化与高中数学课堂教学内容。

目前的研究现状是:一方面,高校数学传统文化与数学教育的理论研究者与一线数学教师的合作的研究较为缺乏,在研究过程中,理论研究者不注重与一线数学教师相结合。为此,这种研究时常不能得到一线数学教师的赞同,认为与实际教学情况不相符,或者说研究过于理想化。另一方面,虽然许多中小学数学教师积累了许多极富理论价值的教学经验,却没有将这些教学经验提升到理论层面,而仅仅只停留在经验层面,使数学文化与数学教育研究难以深入开展。

本文主要是探究如何在高中数学思想和方法的课堂教学中渗透和浸润传统数学文化,使学生提高对数学学习的兴趣和爱好,进一步提高学生的数学素养和人文素养。通过对这一问题的课堂实践,更深入地探讨数学文化在高中数学思想和方法中的渗透,了解将数学文化融入到教学实践时所面临的困难和问题,为本校和周边学校及区域的数学文化教学和数学文化融入数学教学提供实践经验与参考。

1. 教材分析

“余弦定理”是湘教版高中数学教科书必修第二册“解三角形”的主要内容之一,是解决有关斜三角形问题的两个重要定理之一,也是初中“勾股定理”内容的直接延拓,它是三角函数一般知识和平面向量知识在三角形中的具体运用,因此具有广泛的应用价值。本节课是“余弦定理”教学的第一节课,其主要任务是引入并证明余弦定理,在课型上属于“定理教学课”。

解三角形处理的是三角形中长度、角度、面积的度量问题,长度、面积是理解积分的基础,角度是刻画方向的,长度、方向是向量的特征,有了长度、方向,向量的工具自然就有用武之地。从这一角度看,正弦定理和余弦定理的证明让学生经历了运用向量工具解决三角形的度量问题的过程,对运用向量解决几何度量问题奠定了基础。

对于本节“余弦定理”,教材通过向量的数量积将向量等式化为数量等式,得出余弦定理,体现了向量方法在解三角形中的作用,也让学生进一步感受了数学的和谐美。在教科书中,注重数学知识的应用性,体现学以致用原则,让学生自主体验数学在解决问题中的作用,提高学生的分析问题和解决问题的能力,培养数学应用

意识;注重数学内部不同分支之间的联系、数学与日常生活的联系,从而提高学生对数学的整体认识,体现数学的文化价值。

2. 学情分析

高中学生刚刚学习了平面向量的基本知识和正弦定理的推导证明及应用,已经掌握了研究斜三角形的一般思路,对于本节课的学习会有很大帮助。但是,本节内容思维量较大,对思维的严谨性和分类讨论、归纳推理等能力有较高要求,学生学习起来有一定难度。

3. 设计思想与基本理念

在对余弦定理的发展历史进行溯源后,遵循“提出问题、分析问题、解决问题”的步骤,逐步推进,以课堂教学的组织者、引导者、合作者的身份,组织学生探究、归纳、推导,引导学生逐个突破难点,师生共同解决问题,使学生在各种数学活动中掌握各种数学基本技能,初步学会从数学角度去观察事物和思考问题,产生学习数学的愿望和兴趣。

4. 课时目标与核心素养目标

4.1 课时目标

了解余弦定理的历史渊源和探索过程;掌握用余弦定理解决一些简单的三角形度量问题的方法;能运用余弦定理解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

4.2 学科核心素养目标

通过分析余弦定理猜想探索过程中的等量关系来提升学生的数据分析能力;通过余弦定理的证明过程,发展学生的逻辑推理素养;通过用向量的方法去解决三角形的度量问题及实际应用等问题,来增强学生的数学运算能力。

5. 教学重点与教学难点

本节课的教学重点是引导学生掌握余弦定理的两种表示形式及证明余弦定理的向量方法。教学难点是会运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题。

6. 教学过程设计

一、回顾历史 提出问题

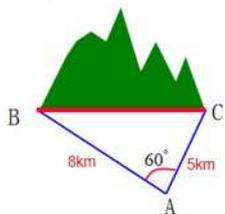
【引入】同学们好,今天我们一起学习余弦定理!余弦定理和之前已经学过的正弦定理是解决有关斜三角形问题的两个重要定理。余弦定理是勾股定理在一般三角形情形下的推广。课前已经给同学们布置了数学学科素养作业——了解三角函数及余弦定理的历史渊源,并画出时间轴。我们请几位同学简要叙述三角函数及余弦定理的发展历程。

【历史再现】余弦定理的历史可追溯至西元三世纪前欧几里得的几何原本,在书中将三角形分为钝角和锐角来解释,这同时对现代数学中余弦值的正负。16世纪开始,数学家的注意力逐渐转向三角学的理论研究。当时,三角函数的定义已经体现了一定的边角关系,一些简单的三角关系式在古希腊以及后来的阿拉伯人中已有研究。文艺复兴后期,法国数学家韦达成为三角公式的集大成者,他的《应用于三角形的数学定律》是较早系统论述平面和球面三角学的专著之一。近代三角学是从欧拉的《无穷分析引论》开始的。

它定义了单位圆，并以函数线与半径的比值定义三角函数，使三角学转化为研究三角函数及其应用，成为了一门比较完整的数学分支学科。再加上 19 世纪诸多数学家的努力，形成了现代的三角函数符号和三角学的完整理论。

【设计意图】通过课前的查阅史料，让学生了解三角函数及余弦定理产生的历史背景，让学生透过数学历史对数学的基本概念、数学思想和方法的发生、发展有一个更深层次的总的认识。

【实际问题】某隧道施工队为了开凿一条山地隧道，需要测算隧道通过这座山的长度。工程技术人员先在地面上选一适当位置 A，量出 A 到山脚 B、C 的距离，分别是 AC=5km，AB=8km，再利用经纬仪（测角仪）测出 A 对山脚 BC 的张角为 60 度。请你帮助施工队长通过计算求出山脚的长度 BC。



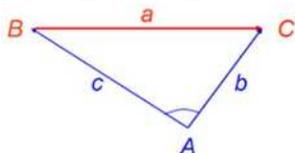
【问题 1】这个实际问题的数学本质是什么呢？其实是一个解三角形的问题：已知两条边及其夹角求第三边的一个问题。结合之前学习的解三角形的知识，请大家思考能用正弦定理解决吗？

【问题 2】那么对于这样一个全新的问题，我们该从哪里下手？该怎么思考呢？还记得正弦定理是如何得到的吗？是用向量法得到的。那我们能否结合向量知识来解决这个全新的问题呢？

【设计意图】创设情境，提出实际问题，激发学生的学习兴趣，培养学生的数学建模思想。

二、数学建模 探究新知

【合作探究一】在 $\triangle ABC$ 中，已知边 c 和边 b 的长度，及夹角 A 的大小，如何用与已知量相关的向量来表示出边 a 的长。



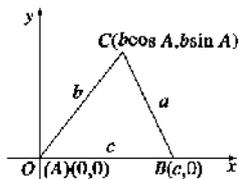
余弦定理：

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

【问题 3】除了用上面的向量法得到余弦定理外，同学们通过课前的查阅史料，已经知道在历史上还有许多的数学家通过把三角形放在笛卡尔平面直角坐标系中来研究，进而得到余弦定理。

【合作探究二】把三角形放在平面直角坐标系中来研究，写出各个顶点的坐标，你能否利用平面内两点间的距离公式来推导余弦定理？

解：如图，以 A 为原点，边 AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，



则 $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(b\cos A, b\sin A)$,

$$\therefore BC^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

同理可证：

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

【问题 4】证明正弦定理的时候我们还用到了几何法。余弦定理作为勾股定理的推广，同学们通过课前的查阅史料，已经知道在历史上还有许多的数学家通过使用几何法和勾股定理来得到余弦定理。

【合作探究三】余弦定理作为勾股定理的推广，你能否考虑借助勾股定理来证明余弦定理？请同学们查阅史料，在课后完成。

【设计意图】启发学生通过小组合作探究的方式，进行三个探究活动，学习余弦定理，对实际问题进行数学抽象，用数形结合思想构建模型，体现数学建模的核心素养。

三、典例精析 应用新知

【例 1】在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$, $b=2\sqrt{2}$, $C=15^\circ$ ，求 A。

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$ ，判断三角形的形状。

【设计意图】通过练习，及时进行余弦定理相关知识的巩固与运用，学以致用。

四、类比归纳 知识升华

【问题 5】通过上述例题，你觉得余弦定理能解决哪几类解三角形的问题？

已知条件	应用定理
已知三边(一解)	余弦定理
已知两边及其夹角(一解)	余弦定理
已知两边和其中一边的对角 (无解、一解或两解)	正弦定理 或余弦定理
已知两角和任意一边(一解)	正弦定理

【设计意图】引导学生对本堂课所学的知识进行归纳，增强对知识的理解记忆的同时，培养学生总结归纳的能力。

五、利用新知 解决问题

【解决问题】某隧道施工队为了开凿一条山地隧道，需要测算隧道通过这座山的长度。工程技术人员先在地面上选一适当位置 A，量出 A 到山脚 B、C 的距离，分别是 AC=5km，AB=8km，再利用经纬仪（测角仪）测出 A 对山脚 BC 的张角为 60 度。请你帮助施工队长通过计算求出山脚的长度 BC。

$$\begin{aligned} \text{解：} BC^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\therefore BC = 7(\text{km})$$

【设计意图】首尾呼应，再返回到刚开始提出的问题，用所学的知识解决实际问题，培养数学建模的核心素养。

六、课堂小结 归纳升华

【问题 6】请同学们自己总结本节课所学的重点知识。

1. 余弦定理的内容及推论
2. 余弦定理可以解决的两类问题：已知三角形的任意两边及其夹角；已知三角形的三边。
3. 数学思想与方法：数学建模、数形结合等。

结束语

余弦定理是揭示三角形边角关系的重要定理，直接运用它可解决一类已知三角形两边及夹角求第三边或者是已知三个边求角的问题。本节课从课前的数学学科素养作业出发，巧妙设计，充分把数学史文化和高中数学课堂教学内容紧密结合，步步为营，循循善诱，通过一系列精心设计地问题串，结合史料，让学生自己得出了余弦定理，这为如何实现高中数学课堂与相关数学史料的有机融合提供了一个范式。

本文系甘肃省教育科学“十三五”规划 2020 年度重点课题《传统数学文化与高中数学教学有机融合方法研究》，GS[2020]GHBZ007。