直角坐标系下二重积分计算公式的一种简单理解

韩霖

（成都锦城学院　四川成都　611731）

摘要：二重积分的计算与定积分计算相比更加复杂，通常我们会把二重积分转化成两次定积分来计算。直角坐标系下二重积分的计算公式推导起来抽象、枯燥，本文提出易于理解的二重积分计算公式推导方法——“面包法”，它可以把抽象的知识具体化，使得抽象的公式更容易理解，也更利于学生对知识的掌握。

关键词：直角坐标系；二重积分；计算公式；面包法

A Simple Understanding of Double Integral Formula in Rectangular Coordinate System

Han Lin

(Jincheng College of Chengdu, Chengdu, Sichuan 611731)

Abstract:The calculation of double integral is more complicated than that of definite integral,usually we will convert the double integral into two definite integrals for calculate.The calculation formula of double integral in rectangular coordinate system is abstract and boring.This paper presents an easy to understand method witch is “bread method” for deriving double integral formula.It can concretize abstract knowledge,makes abstract formulas easier to understand,it is also more conducive to students' mastery of knowledge.

Keywords: rectangular coordinate system;double integral;calculation formula;bread method

高等数学中的很多基本概念都是来源于实际问题，定积分的概念就是来源于几何问题——曲边梯形的面积以及物理问题——变速直线运动的路程问题。二重积分的概念同样也来源于一个几何问题——曲顶柱体体积以及物理问题——密度不均匀的平面薄片质量。利用二重积分的定义来求解二重积分过程复杂，不易实现，我们从二重积分的几何意义出发，通过曲面梯形面积及截面面积已知的立体体积公式，利用“面包法”得出计算二重积分的计算公式。

1. 预备知识

为了用“面包法”得到直角坐标系下二重积分的计算公式，先给出曲边梯形面积计算公式，截面面积已知的立体体积计算公式以及 X-型区域与 Y-型区域的概念。

1.1 曲边梯形面积

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，由直线 $x=a, x=b, y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为曲边梯形（如图 1-1），其面积 A 为 $\int_a^b f(x)dx$。

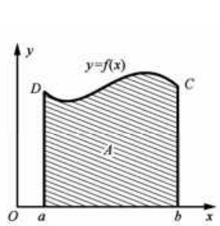

图 1-1

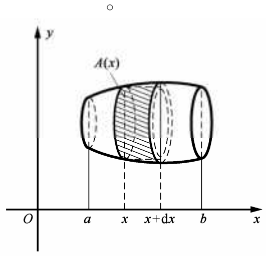

图 1-2

1.2 截面面积已知的立体体积

设有一个立体图形介于过点 $x=a, x=b(a<b)$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的平面截立体图形所得的截面面积，$A(x)$ 为关于 x 的连续函数（如图 1-2），则此立体图形的体积 V 为 $\int_a^b A(x)dx$。

1.3 X-型区域与 Y-型区域

X-型区域：用平行于 y 轴的直线穿过区域，与这一区域的边界的交点最多两个。

用不等式表示为：$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\quad a\le x\le b$。（如图 1-3）

Y-型区域：用平行于 x 轴的直线穿过区域，与这一区域的边界的交点最多两个。

用不等式表示为：$\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\quad c\le y\le d$。（如图 1-4）

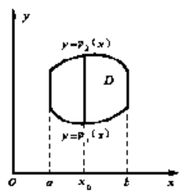

图 1-3

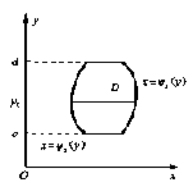

图 1-4

2. 包法”求二重积分

二重积分的几何意义是曲顶柱体的体积，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底,以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。

2.1 面包的体积

把整个面包看作曲顶柱体，其顶面方程为 $z=f(x,y)$，要想求出整个面包的体积，我们把面包切片，先求出一片面包的面积。一片面包的形状看作一个曲边梯形，如图 2-1，利用曲边梯形面积公式，则一片面包的面积为 A 为 $\int_a^b f(x)dx$。

每一片面包片都有面积，则可得到任一面包片的面积函数，即整个面包的截面面积函数 $A(x)$（图 2-2）。

再利用截面面积已知的立体体积公式求解出整个面包的体积 V 为 $\int_a^b A(x)dx$（图 2-3）。

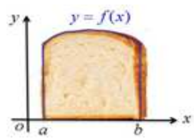

图 2-1

图 2-2

图 2-3

2.2 “面包法”得二重积分计算公式

设曲顶柱体的底区域 D 为 X- 型区域：$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\quad a\le x\le b$，在区间 $[a,b]$ 上任意取定一个点 x_0，作平行于 yoz 面的平面 $x=x_0$，此平面所截曲顶柱体的截面

是以区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底,以曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形（如图2–4），其面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$$ （一片面包的面积）。

过区间 $[a,b]$ 上任一点 x 且平行于 yoz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$ （任一面包片的面积函数）。

利用截面面积已知的立体体积公式,该曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$$ （整个面包的体积），

因此，$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$$ 。

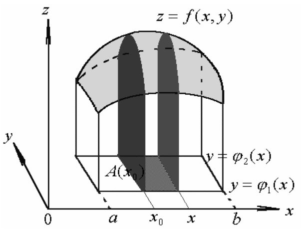

图2–4

总结：区域D为X–型区域，转化为先对 y ，后对 x 的二次积分，即先把 x 看作常数， $f(x,y)$ 只看作 y 的函数，对 $f(x,y)$ 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分,然后把所得的结果(它是 x 的函数 ）再对 x 从 a 到 b 计算定积分即可。

若曲顶柱体的底区域D为Y–型区域，$\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\quad c\le y\le d$ ，利用“面包法”也可得到类似的结果：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx]dy$$ 。

总结：区域 D 为Y–型区域，先对 x ，后对 y 的二次积分，即先把 y 看作常数， $f(x,y)$ 只看作 x 的函数，对 $f(x,y)$ 计算从 $\psi_1(y)$ 到 $\psi_2(y)$ 的定积分，然后把所得的结果(它是 y 的函数)再对 y 从 c 到 d 计算定积分即可。

总之，直角坐标系下二重积分的计算通常转化为二次积分来计算，计算时注意选择合适的积分次序。

3. 积分计算时需要注意的问题

（1）积分区域的形状

前面所画的两类积分区域的形状具有一个共同点:对于X–型区域(或Y–型区域)， 用平行于 y 轴(x 轴)的直线穿过区域内部，直线与区域的边界相交不多于两点。但是，如果积分区域不满足这一条件时，可对区域进行划分，划分为X–型区域(或Y–型区域)的并集。（如图3–1）

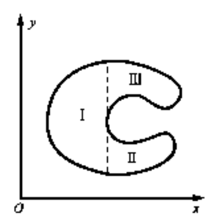

图3–1

（2）积分上下限的确定

二重积分化二次积分，确定两个定积分的上下限是关键。首先画出积分区域 D 的图形(假设图形如图1–3)，在 $[a,b]$ 上任取一点 x ，过 x 作平行于 y 轴的直线，该直线穿过区域 D ，与区域 D 的边界有两个交点 $(x,\varphi_1(x))$ 与 $(x,\varphi_2(x))$ ，这里的 $\varphi_1(x)$、 $\varphi_2(x)$ 就是将 x 看作常数而对 y 积分时的下限和上限，又因 x 是在区间 $[a,b]$ 上任意取的，所以再将 x 看作变量而对 x 积分时，积分的下限为 a ，上限为 b 。同样图形如图1–4方法类似。

4. 题例

若 D 是由抛物线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $x-y=2$ 及 x 轴所围成的闭区域，求 $\iint_D ydxdy$ 。

解：抛物线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $x-y=2$ 在第一象限的交点为 $(4,2)$ 。

把D看作是Y–型区域，则 $y^2\le x\le y+2,\quad 0\le y\le 2$ ，因此

$$\iint_D ydxdy=\int_0^2 ydy\int_{y^2}^{y+2}dx=\int_0^2 y(y+2-y^2)dy=\frac{8}{3}$$ 。

把 D 看作是X–型区域， D 的图形分成两部分，

$D_1:0\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 2$ ，

$D_2:x-2\le y\le\sqrt{x},2\le x\le 4$ ， $D=D_1+D_2$ ，则

$$\iint_D ydxdy=\iint_{D_1} ydxdy+\iint_{D_2} ydxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{x}} ydy+\int_2^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} ydy$$

$$=\int_0^2\frac{x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_2^4(5x-x^2-4)dx=\frac{8}{3}$$ 。

此例可以看出，在二重积分计算时，按某种积分次序计算会比另外一种简单，有时一些题甚至只能按某种积分次序才能计算出来，所以在积分时要适当地选取合适的积分次序。

5. 结语

二重积分是高等数学中一个非常重要的概念，它与前面极限、连续、定积分的知识紧密相连，并且还是后面三重积分，曲线积分及曲面积分等很多内容的纽带。它是一元函数积分问题向多元函数积分问题的转化，也是定积分的推广。二重积分的计算也是后面三重积分计算的基础。计算公式的推导相对抽象和枯燥，若给推导过程加上求面包体积这样一个实际背景，就会使得公式理解起来更容易，有助于提高教学效果。除此之外，在利用直角坐标计算二重积分时，需注意看清楚图形，选取合适的积分顺序，确定好上下限。有时积分顺序选择正确，在一定程度上可以简化我们的计算。

参考文献：

[1]同济大学数学系.高等数学[M].北京：高等教育出版社,2012.

[2]赵春艳.利用直角坐标计算二重积分的教学设计[J].科教导刊,2018(13):96−98.

[3]陈文平,蒋利华.二重积分概念的建模教学法[J].佳木斯职业学院学报,2020,36(03):180−181.

作者简介：韩霖（1988−），女，河南商丘人，讲师，硕士，研究方向：应用数学。