

圆锥曲线中直线斜率和与积相关问题的解法

毛永强¹ 董海燕²

1. 上海市老港中学 上海 201302

2. 上海中学东校 上海 201302

摘要: 本文结合实例给出圆锥曲线与直线相交后, 与斜率和与积相关问题的一种简便解法, 利用这种解法把复杂的运算问题简单化, 让问题变得一目了然, 培养学生解题能力, 落实逻辑推理、数学运算的核心素养.

关键词: 圆锥曲线; 斜率和与积

高中平面解析几何中直线与圆锥曲线问题是比较常见的题型, 直线与圆锥曲线的位置关系一直是命题者关注的重点, 也是高考考查学生核心素养的重要载体, 对学生的数学运算能力有较高的要求^[1]. 近年来, 高考考题中考查解析几何有关直线斜率的和与积问题出现频率较高, 此类题目主要以两类形式考查: 其一, 是圆锥曲线上过同一定点的两条直线的斜率之和或斜率之积为定值; 其二, 是一直线与圆锥曲线交于两点, 曲线上另一点与两交点连线的斜率之和或斜率之积为定值. 解决这类问题常需用到方程思想^[2]. 运用方程思想解答直线与圆锥曲线问题的步骤为: 将直线方程与圆锥曲线方程联立, 把直线方程代入曲线方程, 转化为含有一个未知数的一元二次方程, 利用韦达定理解决相关问题. 这个过程难点在于学生往往不理解其中的道理, 同时, 在具体解答过程中, 往往计算量非常大且繁杂, 使很多考生半途而废, 本文通过探究, 介绍一类与斜率的和与积有关且避开“曲直相交”的另一种解法, 有效培养学生解题能力. 下面结合实例进行探讨.

1. 问题引入

引例: 已知直线 $x+y=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求证: $OA \perp OB$.

解法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $x+y=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$ 联立方程组得:

$$\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1 & (2) \end{cases} \quad (1) \text{ 代入 } (2) \text{ 化简得:}$$

$$4x^2 - 6x + 1 = 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } k_{OA} \cdot k_{OB} &= \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{-x_1+1}{x_1} \cdot \frac{-x_2+1}{x_2} \\ &= \frac{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1}{x_1 \cdot x_2} = -1, \text{ 所以 } OA \perp OB. \end{aligned}$$

解法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将直线方程 $x+y=1$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$ 方程得:

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 2(x+y)^2 \quad (\text{构造齐次方程}) \quad \text{即 } y^2 - 4xy - x^2 = 0, \quad \text{齐次化得:} \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) - 1 &= 0, \quad \text{由韦达定理得:} \end{aligned}$$

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1, \text{ 即 } OA \perp OB.$$

解法二把 1 代换为 $(x+y)^2$ 达到构造二次齐次方程的

目的, 进一步除以 x^2 构造关于斜率的一元二次方程, 利用韦达定理巧妙求解. 引例比较特殊, 求坐标原点与两点连线的斜率之间的关系, 这种方法是否具有一般性呢?

变式: 已知直线 $x+y=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$

相交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(1,1)$, 求证:

$MA \perp MB$.

解法一: 同上解法一设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将

直线方程 $x+y=1$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$ 方程化简得:

$$4x^2 - 6x + 1 = 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2 - 1} = \frac{-x_1}{x_1 - 1} \cdot \frac{-x_2}{x_2 - 1}$$

$$= \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -1 \text{ 所以 } MA \perp MB.$$

解法二: 为了利用引例中解法二, 把坐标原点平

移到点 $M(1,1)$, 则 $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$, 在新坐标系中, 椭

圆方程为: $\frac{(x'+1)^2}{2} + \frac{3(y'+1)^2}{2} = 1$, 化简得:

$$x'^2 + 3y'^2 + 2x' + 6y' + 2 = 0$$

直线方程为 $-x' - y' = 1$, 代入椭圆构造齐次式得:

$$x'^2 + 3y'^2 + 2x'(-x' - y') + 6y'(-x' - y') + 2(-x' - y')^2 = 0,$$

即: $x'^2 - y'^2 - 4x'y' = 0$

齐次化得: $\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + 4\left(\frac{y'}{x'}\right) - 1 = 0$ 由韦达定理得:

$$k_{MA} \cdot k_{MB} = -1, \text{ 即: } MA \perp MB$$

评析: 变式将引例中的原点变为点 $M(1,1)$, 解法一用了“曲直相交”即将直线方程代入曲线方程, 转化为一元二次方程的一般方法, 而解法二则通过坐标平移, 转化为引例给出的方法而顺利解决, 运算量不大。

2. 方法归纳

下面把方法二推广到更一般的情形.

题型: 已知点 P 和圆锥曲线上两点 M, N , 求直线 PM 与 PN 斜率的和或积相关问题^[3].

方法: (1)坐标平移: 将坐标原点平移到 P 点, 得到新的方程(平移口诀是: “左加右减, 上加下减”).

(2)联立方程并齐次化: 设过两点 M, N 的直线方程为 $mx + ny = 1$, 将曲线方程一般化为 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 将直线方程代入曲线方程构造齐次式得:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx(mx + ny) + Ey(mx + ny) + F(mx + ny)^2 = 0$, 可化为:

$$a\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\left(\frac{y}{x}\right) + c = 0.$$

(3)韦达定理得结论: 设直线 PM 与 PN 斜率分别为 k_{PM} 和 k_{PN} , 则由韦达定理可得:

$$k_{PM} + k_{PN} = -\frac{b}{a}, k_{PM} \cdot k_{PN} = \frac{c}{a}.$$

在这个过程中运算技巧是设直线方程为 $mx + ny = 1$.

3. 考题解答, 应用实践

例 1. (2017 年全国高考)^[4] 已知椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \text{ 四点 } P_1(1,1),$$

$$P_2(0,1), P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A, B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 1, 证明: l 过定点.

解: (1) 由于 P_1, P_2 两点关于 y 轴对称, 故由题设知 C 经过点 P_1, P_2 两点,

又由 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2}$, 故点 P_1 不在椭圆 C 上, 所以点 P_2 在椭圆 C 上.

$$\text{因此, } \begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases} \quad \text{所以椭圆}$$

C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 解法一 (常规解法) 设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

如果 l 与 x 轴垂直, 设 $l: x = t (t \neq 0, |t| < 2)$

, 则 $A\left(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right), B\left(t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$, 故

$$k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t} = -1, \text{ 解得: } t = 2$$

, 不符合题意.

从而可设 $l: y = kx + m (m \neq 1)$, 将 $y = kx + m$

代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 化简得:

$$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0, \quad \text{由题意:}$$

$$\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}.$$

而

$$k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2)}{x_1x_2}$$

由假设可知 $k_1 + k_2 = -1$, 故 $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) = 0$,

$$\text{即: } (2k+1) \cdot \frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1) \frac{-8km}{4k^2+1} = 0,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{m+1}{2}.$$

当且仅当 $m > -1$ 时, $\Delta > 0$, 则

$$l: y = -\frac{m+1}{2}x + m, \text{ 即 } l: y+1 = -\frac{m+1}{2}(x-2)$$

, 所以直线 l 过定点 $(2, -1)$.

解法二 (齐次法) 将坐标原点平移到 P_2 , 则

$\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 1. \end{cases}$ 则在新坐标系 $x'Oy'$ 中, 椭圆方程为

$$\frac{x'^2}{4} + (y'+1)^2 = 1, \text{ 即 } \frac{x'^2}{4} + y'^2 + 2y' = 0, \text{ 设直线}$$

l' 的方程为 $mx' + ny' = 1$, 则

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 + 2y'(mx' + ny') = 0, \text{ 化为齐次式得}$$

$$(8n+4)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + 8m\left(\frac{y'}{x'}\right) + 1 = 0$$

$$\text{所以 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{-8m}{8n+4} = -1, \text{ 故 } m = n + \frac{1}{2},$$

即 $2m - 2n = 1$, 所以直线 l' 过点 $(2, -2)$, 则直线 l 过点 $(2, -1)$.

评析: 比较两种解法, 化齐次法运算量明显较小, 而且思维过程简单! 下列各题均可使用两种方法解决, 篇幅所限仅以解法二为例.

例 2 (2018 年新课标 I 19 题) ^[5] 设椭圆

$C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程.

(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

解: (1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 $F(1, 0)$,

l 的方程为 $x = 1$, 代入方程得点 A 的坐标为 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或

$(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, 所以直线 AM 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

或 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$.

(2) 将坐标原点平移到 M , 则 $\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y'. \end{cases}$

则在新坐标系 $x'Oy'$ 中椭圆方程为: $\frac{(x'+2)^2}{2} + y'^2 = 1$, 即 $\frac{x'^2}{2} + y'^2 + 2x' + 1 = 0$,

设平移后的直线 l' 的方程为 $mx' + ny' = 1$, 因为 l' 经过点 $F'(-1, 0)$, 所以 $m = -1$, 直

线 l' 的方程为 $-x' + ny' = 1$, 代入椭圆

得: $\frac{x'^2}{2} + 2x'(ny' - x') + y'^2 + (ny' - x')^2 = 0$,

化简得 $(1+n^2)y'^2 - \frac{x'^2}{2} = 0$ 即

$(1+n^2)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$, 从而有 $k_{MA'} + k_{MB'} = 0$

, 即直线 MA 与 MB 的倾斜角互补, 所以

$\angle OMA = \angle OMB$

评析: 本题把两个角相等问题转化为对应直线斜率互为相反数即斜率之和为 0 的问题.

变式: 设抛物线 $C: y^2 = 2x$, 点 $A(2, 0), B(-2, 0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点. (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程.

(2) 证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

解: (1) 当 l 与 x 轴垂直时, l 的方程为 $x = 2$, 可得 M 点的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$,

所以 BM 的方程为: $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

(2) 将坐标原点平移到点 B , 则 $\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y'. \end{cases}$ 则在新坐

标系 $x'Oy'$ 中抛物线方程为: $y'^2 = 2(x' - 2)$, 设直线

点 $A'(4, 0)$, 所以 $m = \frac{1}{4}$, 代入抛物线的方程得:

$y'^2 = 2x'\left(\frac{1}{4}x' + ny'\right) - 4\left(\frac{1}{4}x' + ny'\right)^2$,

化简得 $(4n^2 + 1)y'^2 - \frac{x'^2}{4} = 0$ 即

$(4n^2 + 1)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$, 由韦达定理得:

$k_{MB'} + k_{NB'} = 0$, 即直线 BN 与 BM 的倾斜角互补,

所以 $\angle ABM = \angle ABN$

例 3 (2021 年 陕西) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $M(x_0, y_0) (y_0 > 0)$ 在抛物线 C 上, O 为原点, 且

$OF \perp MF$, $|MF| = 2$

(1) 求抛物线 C 的方程;

C 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点且直线 MP 的斜率与直线 MQ 的斜率之和为 2, 证明直线 PQ 过定点.

解(1) 易得: $y^2 = 4x$, $M(1, 2)$;

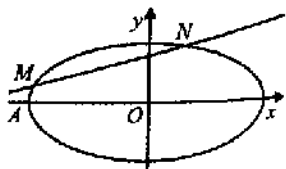
(2) 将坐标原点平移到 M , 则 $\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + 2. \end{cases}$ 则在新

坐标系 $x'Oy'$ 中抛物线方程为 $(y' + 2)^2 = 4(x' + 1)$, 即 $y'^2 + 4y' - 4x' = 0$, 设平移后的直线 l' 的方程为 $mx' + ny' = 1$, 代入抛物线方程得 $y'^2 + 4y'(mx' + ny') - 4x'(mx' + ny') = 0$, 化简得 $(4n + 1)y'^2 + 4(m - n)x'y' - 4mx'^2 = 0$ 即

$$(4n + 1)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + 4(m - n)\left(\frac{y'}{x'}\right) - 4m = 0, \quad \text{由}$$

$$k_{MP} + k_{MQ} = 2 \text{ 得 } -\frac{4(m - n)}{4m + 1} = 2 \text{ 即 } -2m - 2n = 1,$$

即直线 l' 过定点 $(-2, -2)$, 则直线 l 过定点 $(-1, 0)$.



变式: 已知椭圆

$$C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (2 > b > 0) \text{ 的离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 左顶点}$$

和上顶点分别是 A, B .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 在椭圆上, 求线段 BP 的长度 $|BP|$ 的最大值及取最大值时点 P 的坐标;

(3) 不过点 A 的直线 l 交椭圆 C 交于 M, N 两点, 记直线 l, AM, AN 的斜率分别为 k, k_1, k_2 , 若 $k(k_1 + k_2)$, 证明: 直线 l 过定点, 并求出定点的坐标.

解: (1) 椭圆 C 的方程 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 设 $P(x, y)$, 则

$$|BP| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{-3y^2 - 2y + 5}$$

$$= \sqrt{-3\left(y + \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{3}} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{所以, } |BP|_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, P \text{ 的坐标是 } \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{或 } \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

(3) 将坐标原点平移到 $A(-2, 0)$, 则

$$\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y'. \end{cases} \text{ 则在新坐标系 } x'Oy' \text{ 中椭圆方程为}$$

$$\frac{(x' - 2)^2}{4} + y'^2 = 1, \quad \text{即 } x'^2 + 4y'^2 - 4x' = 0,$$

设平移后的直线 l' 的方程为 $mx' + ny' = 1$, 代入抛物线方程得 $x'^2 + 4y'^2 - 4x'(mx' + ny') = 0$

, 化简得 $4y'^2 - 4nx'y' + (1 - 4m)x'^2 = 0$ 即

$$4\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - 4n\left(\frac{y'}{x'}\right) + 1 - 4m = 0, \quad \text{由 } k_1 + k_2 = n$$

, 又 $k(k_1 + k_2) = 1$, 所以, $k = \frac{1}{n}$ 方程变为

$$m(x + 2) + ny = 1 \text{ 即 } k = -\frac{m}{n}, \text{ 由此 } m = -1, \text{ 方程}$$

变为 $ny = x + 3$ 则直线 l 过定点 $(-3, 0)$.

从以上各例题看出, 直线与圆锥曲线相交的两个交点与另外一个点连线的斜率与和积的问题, 首先把另一点平移到原点, 直线方程变为 $mx' + ny' = 1$, 把 1 变为 $mx' + ny'$ 代入变换后的圆锥曲线方程, 把圆锥曲线化为齐次方程, 最后利用韦达定理解决问题, 方法简单、运算量小, 这正是: 斜率和积很常见, 坐标平移到原点, 齐次方程一线牵, 韦达定理巧运算. 整体代换显神奇, 运算素养齐达成.

参考文献:

[1] 肖佳赞. "怎样解答直线与圆锥曲线位置关系问题." 语数外学习 (高中版中旬).02(2024):50-51.

[2] 苏玖.”玩转高考真题——直线与圆锥曲线位置关系.”新世纪智能.ZE(2023):36-38+52.

[3] 朱成万 王红权编著《高中数学思想方法》[M] 浙江大学出版社, 2021.

[4] 池创宏. 如何通过齐次化联立求解直线的斜率之和或积的问题 [J]. 语数外学习 (高中版下旬), 2024, (04): 54-56.

[5] 焦永垚.”聚焦圆锥曲线问题中的“同构法”——以近五年高考圆锥曲线试题为例.”教学考试 20(2023):39-43.

作者简介:

毛永强 (1968—), 男, 民族: 汉族, 学历: 本科, 研究方向: 中学数学教育。