ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

高中数列求和问题七大解题方法的初探

代禧汶

西华师范大学数学与信息学院　四川南充　637000

摘　要：数列不仅是高中代数学习的重点内容，同时也是高等数学学习的基础。数列求和问题是高中数列问题的重点之一，其题型具有多样性、灵活性、整合性，因此解题的方法也多种多样。主要方法有：公式法、分组相加法、分段求和法、错位相减法、裂项相消法、倒序相加法、数列通项法等。大部分数列求和问题都需要掌握一定的技巧才能解决，对学生的理解能力以及综合灵活运用所学知识的能力都有较高的要求。本文有结合一定的具体例题进行探讨数列求和问题的应用，以供参考

关键词：高中数学；数列求和问题；解题方法

数列是高中数学的重要知识点，数列与方程、函数、不等式、几何等知识点有着十分紧密的联系。数列中的递推思想、函数思想、分类讨论思想以及数列通项公式中的各种方法与技巧等，在中学数学中都有重要的地位。在高中数学的各类考试中，该知识点不仅会通过小题进行考察，在大题中也会经常出现，且占有较大分数比重。

长期以来，数列求和方法始终是国际数学领域的重点关注对象，吸引了众多学者投身其中展开深入研究，并产出了颇为丰硕的成果。在教育部颁布的《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》里，对于数列课题有着如下规划：深入挖掘数列的性质以及数列的递推公式等方面的知识，旨在强化学生对数列的认知程度与实际运用能力。例如，借助递推公式去剖析数列各项之间的内在联系，从而更为精准地洞悉数列的变化态势，让学生能够更加得心应手地运用数列知识解决各类数学问题，提升其数学素养与综合能力水平。“高中数列求和方法”的研究在国内引起颇多关注，吸引了大量一线教师和教育教学专家的目光，使得相关研究不断深入，这些成果无一不彰显出数列求和方法的重要性：它既是数学领域中的关键方法，也是学生解答数学问题时不可或缺的得力工具，在教育实践里占据着举足轻重的地位。从学生角度来看，熟练掌握数列求和方法能够有力地促进其数学能力的进阶；从教师层面而言，在 “双减” 政策的大环境下，这一方法为他们实现教育教学质量的切实提升提供了坚实的保障，其重要价值不容小觑，无论是对于学生的学业发展还是教育教学的整体优化，都有着不可替代的关键意义和深远影响。

当下，在数列知识的学习进程中，大部分中学生在课堂听讲及课后复习后，对于数列求和公式以及相关法则均能达到较为熟悉的程度，并且在面对教材中的例题时，也能够理解其中所蕴含的数学思想。但一旦进入实际解题环节，学生便暴露出诸多问题。他们往往难以精准把握题设条件的具体含义，在运用法则和公式时显得生硬僵化，缺乏灵活性，只是单纯地模仿套用教材例题的解题模式，这就使得其解题思路杂乱无章，既影响了解题的准确率，也阻碍了数学思维的良性发展。鉴于此，积极引导学生开展数列方面的深入探索显得尤为必要。通过这样的引导，促使学生逐步养成善于分析问题、深入研究问题的良好习惯，这对于培育学生的研究能力与创新能力有着至关重要的作用和积极深远的意义，是提升学生数学综合素养的关键举措之一。

本文针对高中数学试题中的数列求和类问题，对数列求和的基本方法和技巧进行初探汇总，通过对具体问题进行具体分析，掌握不同求和解题方法的特点、适用题型以及细节等，在解题过程中寻找突破口，同时通过相似的题型、典型的例题等深化对高中数列求和方法的理解和认识，在把握基本方法的基础上，强化对于方法的综合灵活运用。

1.　公式法直接求和

该方法主要包含等差数列求和公式、等比数列求和公式、常用数列求和公式三大类。该方法是数列求和解题的基础，也是学生掌握数列求和复杂类型的前提。

一般在解题过程中，学生能熟记公式并正确判断出题干中的已知条件（如：项数 n，首项 a_1，末项 a_n，公差 d，公比 q 等），故此类型数列求和题目较为简单。以下为三大类的具体公式以及部分对应例题运用：

1.1. 等差数列求和公式：

$$S_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

例题：

$$6+10+14+18+22+26+30=\frac{1}{2}\times 7\times(6+30)=126$$

1.2. 等比数列求和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$$

例题：

$$\log_5 x=\frac{-1}{\log_3 5} \qquad x+x^2+\cdots+x^n=?$$

分析：

首先，通过

$$\log_5 x=\frac{-1}{\log_3 5}$$

解得

$$x=\frac{1}{3}$$

其次，由公式可得

$$S_n=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}^n\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}^n\right)$$

1.3. 常用数列求和公式：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

2. 分组相加法求和

该方法通常运用在既有等差数列又有等比数列的求和问题中，可以通过观察将数列的项按规律分组求和再合并，中学阶段的数列求和问题中一般将项分为常数类、等差数列类、等比数列类、通项公式类等。

具体解题方法为：首先，先观察数列的项的规律；其次，根据规律将项分为对应的类，同时确定项数和对应所需的量；最后，分组运用公式法直接求各类的和并将结果合并从而得到数列的值。

例题：已知数列 $a_n=3^n+2$

若 $a_1=1$，在 a_k 和 a_{k+1} 中插入 k 个数列构成一个新的数列

$$\{b_n\}: a_1,1,a_2,3,a_3,7,9,1\ \ ,a_4,\ldots$$

所有插入的数依次构成以 1 为首项，2 为公差的等差数列，求 $\{b_n\}$ 的前 50 项和 $\{S_n\}$。

分析：设插入的等差数列为 $\{c_n\}$，且

$$c_n=2n-1$$

首先，通过观察题目所给的数列，可将数列分为通项公式类和等差数列类，其中数列 $\{a_n\}$ 又分为以 3 为首项，3 为公比的等比数列类和常数类。

其次，题干是求解前 50 项的和，而

$$1+2+3+\cdots+7+8+9=45<50$$

$$1+2+3+\cdots 9+10=55>50$$

则通项公式类 占 9 项，等差数列类 占 41 项。

则

$$S_n=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{41})$$

$$=\frac{3(1-3^9)}{1-3}+2\times 9+41\times 1+\frac{1}{2}\times 41\times 40\times 2$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3^{10}}{2}+18+1681=1697\frac{1}{2}+\frac{3^{10}}{2}$$

3. 分段求和法

该方法也称合并法求和。与分组相加法求和相似但又有自己的特点。该方法主要针对在数列中有部分变量合并在一起可能会出现特殊性质后便于求解的题型。

因此，在求解此类数列的和时可以先将这些特殊变量放在一起先进行求和，再去求解整个数列的和。特别地，

当所要求和数列中的项有明显差别时优先考虑此方法。

例题：已知数列 $\{a_n\}$

$a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_{n+1}-a_n=a_{n+2}$ 求前 2023 项的和 S_{2023}。

分析：设

$$S_{2023}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2022}+a_{2023}$$

已知 $a_1=1,a_2=3,a_3=2$

可得

$$a_4=-1,a_5=-3,a_6=-2,\cdots,$$
$$a_{6k+1}=1,a_{6k+2}=3,a_{6k+3}=2,$$
$$a_{6k+4}=-1,a_{6k+5}=-3,a_{6k+6}=-2,$$

则

$$a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}+a_{6k+6}=0$$

而

$$2023=6\times337+1$$

所以

$$\begin{aligned}S_{2023}=&(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\cdots\\&+(a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}+a_{6k+6})+\cdots\\&+(a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}+a_{2022})+a_{2023}=1\end{aligned}$$

4. 错位相减法求和

该方法是高考常考的重要知识点，也是数列求和的重要方法之一。主要运用于求解形如 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的差比数列的前 n 项和，其中 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别为等差、等比数列，通过利用等比数列的性质来变化数列，以达到构造出相同项的目的。在实际教学中，学生可以较好的理解这一方法，但也较易出现因为书写格式不规范、错位时对应错误、正负符号遗漏等问题导致正确率低。

例题：已知 $a_n=n\cdot2^n$，求前 n 项和 T_n。

分析：

$$T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n\cdots①$$
$$2T_n=\quad 1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}\cdots②$$

将②－①：

$$T_n=-1\times2^1+(1-2)\times2^2+(2-3)\times2^3+\cdots+(n-1-n)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$$
$$T_n=-2-2^2-2^3-\cdots-2^n+n\cdot2^{n+1}=-\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n\cdot2^{n+1}$$

所以

$$T_n=2-2^{n+1}+n\times2^{n+1}=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$$

5. 裂项相消法求和

该方法是组合与分解思想在数列求和问题中的具体运用，因裂项具有技巧性较强、形式较多的特点，导致学生不易理解、掌握。裂项相消法求和的实质就是将数列中的每一项分解裂开，然后再重新组合成新的项，使数列在分解过程中能够消去一些项，以达到最终求和的目的。在教学过程中，教师需侧重于结合典例将常见的裂项方法详细地罗列给学生，使学生在学习、练习中切实体会裂项的含义。

5.1. 常见的裂项类型：

$$(1)a_n=f(n+1)-f(n)$$
$$(2)a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$(3)a_n=\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^n}$$
$$(4)a_n=\frac{1}{(A\quad+B)(A\quad+C)}=\frac{1}{C-B}\left(\frac{1}{A\quad+B}-\frac{1}{A\quad+C}\right)$$
$$(5)a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

例题：已知数列 $\{a_n\}$，

$a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n+1},b_n=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n-1}}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

分析：由

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}=\frac{n}{2}$$

得到

$$b_n=\frac{2}{a_n\cdot a_{n-1}}=\frac{2}{\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{2}}=8\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$S_n=8\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=8\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{8}{n+1}$$

6. 倒序相加法求和

该方法又称反序相加法求和，常用于等差数列求和公式的推导，也是解决数列求和问题的重要方法之一。倒序相加的实质就是将一个数列倒过来排序，然后与原数列两式相加，将所有项进行配对，构造出易于求得和的组合。

例题：

ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

求证

$$C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\cdots+(2n+1)C_n^n=(n+1)2^n$$

证明：

设

$$S_n=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\cdots+(2n+1)C_n^n\cdots①$$

将①倒序，由 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 有

$$S_n=(2n+1)C_n^0+(2n-1)C_n^1+\cdots+3C_n^{n-1}+C_n^n\cdots②$$

将①②相加，有

$$\begin{aligned}2S_n&=(2n+2)C_n^0+(2n+2)C_n^1+\cdots+(2n+2)C_n^n\\&=(2n+2)\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n\right)=(2n+2)2^n\end{aligned}$$

所以 $S_n=(n+1)2^n$

7. 数列通项法求和

该方法同样是考试考查的重点内容，实质是要先根据数列的特征以及结构进行分析，明确数列的通项以及形式，再利用数列的通项公式揭示数列规律求和。

例题：求解

$T_n=1+1\quad+111+1111+\cdots+111\cdots111$ 的值

分析：已知

$$T_k=11\cdots11=\frac{1}{9}\times99\cdots99=\frac{1}{9}\left(10^k-1\right)$$

则

$$T_n=\frac{1}{9}\left(10^1-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^2-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^3-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^4-1\right)+\cdots+\frac{1}{9}\left(10^n-1\right)$$

$$T_n=\frac{1}{9}\left(10^1+10^2+10^3+10^4+\cdots+10^n\right)-\frac{1}{9}(1+1+1+1+\cdots+1)$$

$$T_n=\frac{1}{9}\times\frac{10\left(1-10^n\right)}{1-10}-\frac{n}{9}=\frac{1}{81}\times\left(10^{n+1}-10-9n\right)$$

数列往往会以很多题型出现，这里只初探了七种，是远远不够的，但是题目总是“换汤不换药”，只要抓住了其中之重点，了解重要的知识点，从而以不变应万变。

参考文献：

[1] 彭印玲 . 高中数学中的数列求和教学研究 [J]. 数理天地 (高中版),2023,No.358(03):93–95.

[2] 周湖平 . 探讨高中数学数列求和的解题方法 [J]. 数理天地 (高中版),2022(08):4–5.

[3] 常国良 . 例谈高中数学数列求和的教学 [J]. 高中数理化 ,2020(20):4.

[4] 袁霞 . 高中数学教学“数学文化”渗透之思考——一节“等比数列求和公式”的教学尝试 [J]. 数学大世界 (中旬),2017,(07):15–16.

[5] 王小丽 , 王鑫 . 高中数学中数列求和问题的探究 [J]. 新课程 (中学),2017,(05):127.