ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

一道典型最值问题的一题多解

廖书苗

西华师范大学数学与信息学院　四川南充　637000

摘　要：最值问题是一种常见的题型，通常涉及多个变量，且约束条件繁多，笔者以一道典型最值问题为例，进行解题方法的创新型研究，分别从代数角度和几何角度思考，赏析它的四种不同的解法，来体会这种题型存在的解题规律，现与读者分享、交流，以期抛砖引玉。

关键词：最值问题；一题多解；中学数学

在浩瀚的数学宇宙中，最值问题是高中数学学习的基础，通常可以和不等式结合起来求解，其解题方法多样。本文通过系统整理一道高中数学中最值问题的典型例题的一题多解方法，即基本不等式法、函数切线法、万能参数 k 法和拉格朗日乘数法策略，使学生达到会做最值问题，能有多种方法解最值问题的水平。让学生能够深刻理解最值问题的本质，有技巧的梳理最值问题的解题思路，掌握有效的求解方法，进而培养解决复杂实际问题的能力。

例题：已知 $a>0,b>0,a+b=1$，求 a^2+b^2 的最小值

1. 基本不等式法

解 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，知 $ab\le\frac{1}{4}$，

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\ge(a+b)^2-2\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$，

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等。

思路：首先，当要解决数学问题时，第一步需要明确题目要求求解的是最大值、最小值，或者是其他特定的数值，比如是否是某个特定范围的解集等等。第二步要判断这个问题是否适合用基本不等式法来解决。“利用基本不等式求最值”问题，是在学生了解基本不等式的生成过程及其代数证明和几何解释之后进一步学习的内容，是对基本不等式理解的进一步加强，突出了基本不等式的工具性作 用。基本不等式法是一种强有力的数学工具，通常在处理涉及多个变量的表达式时具有独特的优势，特别是当问题涉及到多个量的和、积，或者与平方、平方根等相关的表达式时，使用基本不等式法是一条简洁有效的解题路径。在本题中已知两个未知数之间的关系 $a+b=1$，求解时可以考虑通过基本不等式的灵活转换解答。

以本题为例，利用基本不等式法解最值问题的一般方法为：

①识别问题：求 a^2+b^2 的最大值，条件 $a>0,b>0,a+b=1$。②转换问题：按照题干已知条件和所求最值的结构特点，将 a^2+b^2 转化为 $(a+b)^2-2ab$③套用基本不等式：利用基本不等式转换得到 $ab\le\frac{1}{4}$，即可带入得 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\ge(a+b)^2-2\times\frac{1}{4}$ ④确定最值：整合题目给出条件和推导出的结论，求出最小值。当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$。⑤写出答案：a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取到。

总的来说，在审视一个数学最值问题时，我们不仅需要敏锐地识别题目要求，即要求求解的具体目标（是最大值还是最小值），还需要仔细地分析问题的数学结构，判断其是否适合运用基本不等式法来求解。而这种对问题涵义的深入理解和分析，正是通往正确解答的关键所在。

2. 函数切线法

解 注意到函数

$f(x)=x^2$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处有切线 $y=x-\frac{1}{4}$，从而由 $f(x)=x^2$ 的凸性知 $f(x)=x^2\ge x-\frac{1}{4}$ 恒成立，则

$f(a)+f(b)\geq(a-\frac{1}{4})+(b-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等。

思路：以函数的视角思考这道题，发现问题中 a^2+b^2 中两个变量都是平方的形式，一个有效且直观的解题策略是构造一个包含这两个变量的函数，于是可以构造函数 $f(x)=x^2$。这一步至关重要，基于函数和方程的紧密联系，将其转换为函数切线问题，运用数形结合的方法，利用函数的性质来探究问题，让学生注意到函数切线和函数图像的联系，结合问题条件，就能得到最值的具体大小。本题中，将问题转化为函数的切线问题是一种十分巧妙的方法，通过数形结合的方法，可以引导学生观察并理解函数切线和函数图像之间的动态关系，再结合题目给出的具体条件，例如变量的取值范围、所给的约束条件等等，可以进一步缩小范围，并综合运用函数的单调性、极值、题目中的特定条件等等来解决问题。这一思考过程一方面可以锻炼学生的数学分析能力，另一方面可以加深学生对函数与方程、数与形之间内在联系的理解。

函数切线法解最值问题的一般方法为：

① 识别问题并确定目标函数：首先，明确题目要求求解的最值类型（最大值或最小值）以及相关的约束条件，根据题目条件构造或确定一个目标函数。② 求导数：对目标函数求导，得到其导数函数。③分析导数：令导数等于 0，解方程得到极值点；判断单调性，分析导数在极点两侧的符号变化，确定函数在这些区间上的单调性；确定极值。④利用切线法寻找最值：首先构造切线，再分析切线与目标函数在特定区间上的相对位置关系。如果切线在整个区间上都位于目标函数之上（或之下），则可以通过切线来估计目标函数在该区间上的最大值（或最小值）。⑤验证最值。

3. 万能参数 k 法

解 设 $k=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1$，从而 $2a^2-2a+1-k=0$ 具有实根，对应的判别式 $\Delta=4-4(2-2k)=8k-4\geq 0,解得k\geq\frac{1}{2}$，从而 $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等。

思路：在高中数学中，并没有一个严格意义上的“万能参数 k 法”能够直接解决所有类型的最值问题。但确实在很多情况下可以通过引入参数 k 来简化问题或转换问题的形式，能够更容易地找到最值，从而更高效的解决某种类型的最值问题。这种方法并不是一种固定的算法，该方法的核心是它的灵活性，他并不是一种机械式的算法，而是需要根据具体问题的特点和需求进行灵活巧妙运用的。在实际操作中，可能会遇到一些包含多个变量和复杂表达式的最值问题，我们可以尝试引入一个参数 k，将原问题中的部分用 k 进行等价代替。在本题中，可以将 a^2+b^2 用 k 等价代替，有 $k=a^2+b^2$，从而可以得到一个在形式上更加简洁的新问题，更加便于我们后续的处理，再由题干给出的关系式 $a+b=1$，即得到 $b=1-a$，二者结合化简和整理，逐步消去多余的变量，得到一个只含有一个未知数的表达式，通常这个表达式往往是一个关于 k 的一元二次方程或不等式，在本题中为 $k=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1$，由此就能将问题转化为一元二次方程求解问题。所以在有多个未知数的复杂问题中，可以用 k 巧妙化简求解，这种方法的关键是找到恰当的等价替换方式，需要学生对问题的结构和性质有较为深入的理解。

万能参数 k 法解最值问题的一般方法为：

①识别问题并引入参数：明确题目要求求解的最值类型（最大值或最小值）以及相关的函数或表达式。然后，根据问题的特点，尝试引入参数 K 来简化或转换原问题。②构造新的函数或表达式：利用引入的参数，构造一个新的函数或表达式。③分析新函数或表达式的性质：对新构造的函数或表达式进行分析，包括求导、判断单调性、找极值点等。这些步骤有助于确定新函数或表达式的最值点。④利用参数求解原问题的最值：在找到新函数或表达式的最值点后，通过回代参数 K 的值，求解原问题的最值。这可能需要解方程、比较大小等步骤。⑤ 验证答案。

4. 拉格朗日乘数法

解 约束条件 $\phi(a,b)=a+b-1=0$，拉格朗日

函数 $L(a,b)=a^2+b^2+\lambda(a+b-1)$，得到方程组

$$\begin{cases}L_a=2a+\lambda=0\\L_b=2b+\lambda=0\\L_c=a+b-1=0\end{cases}$$，解得$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\\lambda=-1\end{cases}$$，

对应于极值点 $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，在此处的黑塞矩阵 $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ 为正定的，从而 (a,b) 为条件极小值点，从而为最小值点 $L(a,b)\geq L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

在计算时，有时拉格朗日乘数法得到的极值点是唯一的，且通常就是最值点。可以通过配凑不等式的方法辅助证明极值点为最值点。如本题，求得 $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，可作如下的不等式说明

$$a^2+b^2=a^2+b^2-(a+b-1)=a^2-a+b^2-b+1=(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等，从而 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$

本题立足基础但又简约不凡，既回归本质，又聚焦通性。由此，最值问题解法多种多样，不仅有本文所提到的四种方法，还有三角换元法、几何画图法等多种有效的解题方法。三角换元法是指在处理包含三角函数或可以用三角函数进行化简的表达式中，通过引入适当的三角函数变量，可以化简原问题中的复杂表达式，更加简洁的找到最值，要求学生对三角函数的性质有较高的理解；几何画图法是一种更为直观的解题方法，且更富有创造性，更加适用于可以通过几何图形进行直观表示的问题，学生可以利用画图的方法，更加清晰的看到问题中每个元素之间的关系，从而更加容易找到解决问题的线索，这种方法能够激发学生的创新思维。这些方法都十分有效，但在解决具体问题时要酌情选择最适合的方法，这要求学生能够对各种解题方法的特点有了解，可以根据问题的具体情况进行多样化的选择。

学生在解题活动中，通过学习和掌握对最值问题的多种解题方法，根据已有的知识体系，发现知识间的组合和串联，寻找思维路径，强化模型意识，感悟思想方法，积累活动经验，不仅能拓展学生思维的宽度，还能促进学生思维的深度发展，让学生学会从多个角度审视问题，解决问题并能找到问题的最优解，来培养学生更加全面和深入的数学思维能力，这种能力不仅仅在数学学习中至关重要，还在学生未来的工作和学习中也发挥巨大的作用。学之道在于悟，教之道在于度，只有回归学生视角，让他们经历思辨，生成自我的理解和感悟，才能积累活动经验，使其能力得到提升。

参考文献：

[1] 刘海涛 , 徐东辉 . 一道双重最值问题的赏析 [J]. 中学数学研究 ,2024,(11):17–19.

[2] 周文建 , 祖米热提 · 阿里木 . 例谈拉格朗日乘数法在高中多元函数最值问题中的应用 [J]. 福建中学数学 ,2023,(07):43–45.

[3] 李润鑫 , 黄辉 , 尚振宏 , 等 . 多目标约束向量优化问题的类拉格朗日乘数法 [J]. 数学物理学报 ,2018,38(06):1076–1094.