教育与学习 7 卷 2 期
ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

基于“板凳龙”螺旋线动态运动模型设计的研究

王瑞琳　于鹏程　王新博　张　茹*

华北理工大学数学建模创新实验室　河北唐山　063210

摘　要：本文主要将传统风俗“板凳龙”抽象成沿等距螺旋线的运动过程，通过建立螺旋线运动轨迹模型和碰撞检测模型完成确定最小螺距、调整圆弧以减小调头曲线和确定龙头最大行进速度的问题。

首先建立螺旋线运动轨迹模型，由几何关系和相对位置，迭代法表示出各点的位置和速度，利用 Runge-Kutta 求解。探究相邻点的距离关系，建立碰撞检测模型，优化求解最小螺距。通过改变两条圆弧的圆心角，建立 S 形路径优化模型，采用梯度下降法寻找函数最小值。

最终解得在最小螺距为 46cm，得到曲线的最短路径为 13.48m 的情况下，能够保证螺旋线运动过程中不发生碰撞。经灵敏度检验，该复合模型灵敏度较高，适应度较强，可扩展适用于其他领域的相关螺旋线运动中。

关键词：螺线运动轨迹模型；Runge-Kutta；碰撞检测；遍历算法；优化模型

一、问题分析

1.1 问题背景

板凳龙表演将上百条装饰有龙形图案的长板凳串联起来，板凳龙会沿着螺旋线的路径进行移动盘旋，在保证参与者流畅协调的盘入和盘出情况下，舞龙队的速度越快且所占面积越小，观赏性越好[1]。

为模拟出这一动态过程，本文将建立基于螺旋线运动的数学模型，模拟板凳龙的运动轨迹，进一步完善整个队伍的运动模型，为优化实际的舞龙活动提供理论依据。

二、问题分析

本题的核心在于准确描述板凳龙沿螺线盘入时的运动过程，由于盘入路径为阿基米德螺旋线[3]，确定螺线的中心点为坐标原点建立直角坐标系进行计算，据此可通过建立螺线方程和运动学公式，建立螺旋线运动轨迹模型。计算龙头与各个龙身前把手的位置和速度。判断在盘入过程中什么时刻会发生碰撞，需要综合考虑螺线方程和距离公式，设定约束条件对距离阈值进行碰撞二分法判断。明确舞龙盘入螺旋线经过边界的约束条件，同时螺距不能无限小，满足上述两者的情况下，建立优化模型。利用遍历的方式不断缩小步长，最终呈现出最优解。在考虑前一段圆弧和后一段圆弧连接点的平滑性，保证板凳龙表演过程中不会发生方向的突变。通过调整第一段圆弧和第二段圆弧的圆心角，建立 S 形路径优化模型。采用梯度下降法寻找函数最小值，使得路径的总长度为最小值。

三、模型假设与约定

1. 板凳龙表演路径视作阿基米德螺旋线，且螺旋线始终保持水平。

2. 板凳之间连接的把手不可伸缩，且孔径与把手间的连接处无摩擦力。

3. 每个板凳视为一个质点，其质量集中于把手中心。

4. 龙头前把手在一般情况下的速度始终保持 1 m/s，方向始终沿着螺线切线方向。

5. 不考虑尚未经过龙头初始位置的节点的速度和位置，均记作未进入。

四、模型建立与求解

4.1 螺旋线运动轨迹模型的建立与求解

板凳龙的表演路径是沿等距螺旋线进行，为了方便分析，针对板凳龙的运动轨迹，将其投影到水平面上，建立以螺线中心为原点的平面直角坐标系。

4.1.1 模型的建立与求解

首先利用极坐标描述螺线的形状，由于已知龙头前把手的速度为 1m/s 始终保持不变，则龙身与龙尾的速度也可表示。随着时间推移，龙头所走的弧长增加，可以得到任意时刻 t 时，对应龙头前把手的 $\theta_h(t)$ 和 $r_h(t)$，进而确定龙头前把手的位置。

由于最终积分为 $-b\sqrt{\theta^2+1}\cdot\theta'=1$，无显式解。Runge-Kutta 法是求解常微分方程的初始有效数值方法，被广泛使用。运用数值计算的方法求解连续性问题时，需要将连续问题转化为离散问题，进而采用迭代的方式求解差分格式的离散方程。主要思想就是将微分方程的解进行离散化，将其转化为一系列逼近值，采用四阶 Runge-Kutta 方法进行求解，具有高精度和稳定性。[5]

Runge-Kutta 法求解该隐式微分方程步骤：

Step1：确定初值问题：给定初始条件 $y(t_0)=y_0$ 和初始时间 t_0

Step2：计算四个斜率估计[6]：

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\cdot k_1) \\ k_3 = f(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\cdot k_2) \\ k_4 = f(t_n+\frac{h}{2}, y_n+h\cdot k_3) \end{cases} \#(6)$$

Step3：根据四个斜率不断更新估计计算下一个时间点的解 y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)\ \#(7)$$

Step4：进行迭代将确定好的 y_{n+1}, t_{n+1} 作为下一个时间步长，重复 Step2，Step3，达到所需范围。

（3）迭代每秒各点的坐标

龙头弧长公式可以用板凳龙由龙头板凳 3.41m、龙身和龙尾板凳 2.2m 组成，确定各点的位置。

（4）每秒各个点速度求解

由于上述已知各点的坐标 $L_i = (x_i, y_i)$，由此可确定切向量的大小与方向，利用后把手中心的坐标求解出其方向向量，找到前把手与后把手的旋转中心。

Step1：$\sqrt{x^2 + y^2} = b \cdot \cos\tan\frac{y}{x}$ 求导

Step2：根据切向量求解过端点垂直于切向量的直线，求直线交点确定转动中心的坐标，假设 $\overrightarrow{n_i} = (x_i^d, y_i^d)$，则根据 $\overrightarrow{n_i} \cdot \overrightarrow{z_i} = \vec{0}$，$\overrightarrow{n_i} = (y_i^{'}, -x_i^{'})$ 确定。

Step3：通过板凳中心到把手的距离之比，确定把手的速度之比

则最终利用 $\frac{v_i}{v_{i+1}} = \frac{l_i}{l_{i+1}}$，利用距离板凳中心距离把手的距离，确定把手的速度。由于时间步长较大，且稳定性要求程度较高。对于该项式采用隐式差分法，即前项差分方式。

由于在初始时，后续节点尚未经过龙头初始位置，不考虑其速度，均记作 0。在 300s 内，各龙身节点的速度均呈现一定程度的递减。分析速度变化有如下原因：

（1）根据牛顿第一定律，物体在没有外力的作用下，倾向于维持原状。龙头受到表演者的外力推进，龙身在没有足够外力作用，其余部分随着龙头移动而移动，相对于龙头保持静止，龙头方向变化较快，而龙身需要时间和力量适应龙头速度。因此随着龙身长度的增加，速度因为惯性而相对减弱。

（2）由于板凳龙的连接方式不灵活，板凳间的相互作用会导致龙头运动状态不会立即转递到龙身各个部分，因此速度逐渐减小，物理学中称为阻尼现象。

速度的减小反映了板凳之间相互作用的影响，符合物理规律，并且减小幅度平稳，没有突变或不合理的速度波动。随着时间推移，板凳之间的相互作用显著。龙头以恒定速度运动，而后面的板凳由于需要进行复杂的旋转调整，速度逐渐减小，这种速度递减的模式是合理的。

4.2 碰撞检测模型

本题首先考虑板凳的宽度和相邻板凳之间的最小距离，在距离过近或小于安全距离时，终止盘入进程。

根据螺旋线公式，已然得知各个点在各个时间的位置信息，对于每个时间步长，计算相邻板凳之间的距离，检测是否出现板凳前把手的位置相差最小安全距离。

4.2.1 模型建立

不能确定龙头所走过的路径中，龙身重复行走时一定不会触碰龙身。首先判断龙头与龙身发生碰撞的情况。

求解出环外的龙身把手的直线方程，判断顶点是否会落入龙头四个顶点所确定的矩形框。将龙头把手所确定的直线方程平移至板凳边界，计算顶点到达两条边界的距离之和，所得结果如果小于或等于 0.3m，则证明发生碰撞，停止盘入；反之没有碰撞，将继续盘入。

据此，如果龙身中的顶点距离龙头所确定的两条边界线之和等于板凳宽度 0.3m，则说明发生碰撞。接下来对龙头与龙身之间；龙身与龙身之间进行遍历。比较时间的大小，选择最短时间作为碰撞安全时间[8]。

4.2.2 模型结果与分析

根据程序显示，碰撞发生时距离初始时刻为 412.6s。根据碰撞发生时的结果显示，各个节点在螺线上的位置分布。可以看出整个画面呈现出有规律的螺旋结构，展现出其在特定时间的运动状态，按照一定规律向中心靠近，可据此预测舞龙队不同时刻的运动方向和趋势。

4.3 沿边界盘入最小螺距模型

本题所给出的调头空间是直径为 9m 的圆形，因此其半径为 4.5m，且要求龙头前把手的运动需要沿着螺线盘入这个掉头空间的边缘。因此需要选择合适的螺距，使得龙头在一定圈数后距离螺线原点的距离为 4.5m。

4.3.1 模型建立

将所求解的最小螺距理解为满足题目约束条件下的最小螺距，首先在边界上需要满足龙头的径向距离为 4.5m；同时龙头所走过的路程与螺旋线之间的关系条件；以及整个过程中不能发生板凳间的碰撞，建立优化模型。

（1）边界约束

假设板凳龙已经盘入了 n 圈。D 为所求最小螺距，为保证龙头盘出时刚好达到调头空间如图所示，则 $r = 4.5m$，据此可判断出 $D = \frac{4.5}{2\pi n}$。

（2）螺旋线长度与时间的关系

θ_e 表示为龙头盘入极径为 4.5m 的掉头空间边界时的极角，所以 $r(\theta_e) = \frac{p\theta_e}{2\pi} = 4.5$，据此求解终止时刻所对应的极角 $\theta_e = \frac{4.5 \cdot 2\pi}{p}$。

（3）行进约束条件

龙头始终保持 1m/s 的速度行进，总的路程等于从起点到达调头空间边界所走的总螺线长度。

（4）碰撞约束条件

求解最小螺距仍需要保证，各个板凳之间不发生碰撞。如果螺距设置的过小，曲率过大，在行进时会发生碰撞。所以设定 p_d 为临界值，建立几何约束条件。综合以上条件，将螺距 p 和碰撞条件下的临界螺距 p_d 结合起来，得到优化过后的最小螺距。

4.3.2 模型求解

首先定义优化的目标是，螺距尽可能小。由于舞龙队初

始起点未发生变化，龙头前把手在直角坐标系中仍为（8.8，0），所以距离到达掉头空间的极限大的情况下螺距为 $8.8-4.5=4.3m$；而把手中心均位于螺线上，板凳宽为 0.3m，故调头空间的极限小情况下为 $0.3m$。利用二分法对该模型进行求解步骤为：

Step1：明确搜索区间为[0.3m，4.3m]

Step2：计算区间中点，比较中点数据所求结果与目标数据的关系。

Step3：更新区间，不断查询，迭代重复 Step2。

锁定在（0.6m~0.5m）范围内，提高测量准确性，将步长设定为 0.01m。最终求解得出最小螺距为 46cm，即在保证板凳龙沿着螺线盘入边界，且不发生碰撞的最小螺距为 46cm。

4.4 S 形路径优化模型

4.4.1 模型建立

假设第一段圆弧的半径为 r_1，第二段圆弧的半径为 r_2。根据题目要求可知第一段圆弧半径是第二段圆弧的两倍。

调头路径总长度即为两端圆弧之和，根据几何关系，求解第一段圆弧和第二段圆弧的圆心角 θ_1,θ_2 之间的关联，为确保两段弧线连接点出保持平滑，则需要保证两端圆弧在该点的切线斜率一致。

通过调整 θ_1,θ_2，使得曲线与螺线相切且路径最短，二者连接处保持平滑连接，即二者斜率 $T_1=T_2$。由此建立双变量单目标优化模型。

4.4.2 模型求解

利用梯度下降算法，寻求函数的最小值。由于其迭代方向沿着函数梯度的负方向进行，减少函数值。

优化所得 $r_1=3.0054m$，$r_2=1.5027m$，$\theta_1=9.48^\circ$，$\theta_2=9.49^\circ$。此时路径最短 $L_{total}=13.48m$。优化结果表示能够调整圆弧，保证弧线相切的情况下，调头路径最短，路径最短为 13.48m。

五、模型检验与灵敏度分析

5.1 调整螺距，探究最短调头路径

针对问题四寻求最短调头路径问题，通过改变螺距，探究板凳龙的运动规律，范围设定在 0.5m~2m。

有最小弧长，其余皆不存在要求圆弧，存在的最小圆弧随螺距的增加而逐渐减小，0.5-1.3 处的点近似呈线性关系，1.7-1.9 处的点近似呈线性关系，且斜率小于前者，说明其最短弧长的减少幅度降低，基本在此数值附近波动，可见此模型能很好的反应板凳龙调头的运动规律，体现了模型的准确性。

5.2 改变调头空间圆形半径

改变旋入圆的半径，范围是 2.5-6m，发现只有 2.5m，4m，4.5m，6m 存在最小圆弧长，且近似呈线性增加，可以看出旋入圆的半径对最小圆弧长的影响比螺距较大，验证了模型的准确性。

六、模型的评价与推广

通过建立和分析螺旋线运动轨迹模型、碰撞检测模型、调头路径优化模型，采用 Runge-Kutta 法、遍历法、梯度下降法、二分法、数值模拟法等方法，为解决板凳龙队伍的运动问题提供了科学的理论依据。这些模型不仅在特定问题中表现出色，还具有较强的适用性和推广价值。

首先，螺距、调头路径以及龙头最大速度的确定，为“板凳龙”这项民族文化遗产活动提供了一定的理论基础。避免了在表演过程中碰撞情况的发生，同时，缩短螺距，加快速度，使表演更具观赏性。

除此之外，在机械工程领域，空间航行技术等领域，对于相关自动化器械以及飞行器的路径规划、转向优化、实时避障以及速度控制等方面的应用有广泛的应用潜力，为实现高效、协调、安全的运动和互动过程提供了坚实的理论和技术支持。

参考文献：

[1]胡杨.川东北客家龙舞文化节庆旅游开发研究——以国家级“非遗”安仁乡板凳龙为例 [J].武术研究，2024，9（1）：121-124.

[2]马利琴，黎贝蓁.乡村振兴背景下地方文化与小学美术课堂整合的实践研究——以《龙韵艺术•竹编板凳龙》校本课程为例 [J].美术教育研究，2024，(13)：154-156+160.

[3]刘崇军.等距螺旋的原理与计算 [J].数学的实践与认识，2018，48（11）：165-174.

[4]张鹏宇，徐卫国.螺旋线的几何关系及其生形算法比较研究 [J].建筑技艺，2018，(1)：109-111.

[5]张应洪，刘雪林，施芳，等.非线性耦合分数阶常微分方程组的 Runge-Kutta 法 [J/OL].贵州师范大学学报（自然科学版），1-8[2024-09-07].

[6]Alamri Y，Ketcheson I D .Very High-Order A-Stable Stiffly Accurate Diagonally Implicit Runge-Kutta Methods with Error Estimators [J].Journal of Scientific Computing，2024，100（3）：84-84.

[7]李焕荣.随机常微分方程的几种数值求解方法及其应用 [J].重庆工商大学学报（自然科学版），2021，38（6）：82-88.

[8]邓伟华.反常与非遍历多尺度建模、分析及算法 [J].中国科学：数学，2023，53（8）：1039-1066.

[9]刘佳旭，陈嵩，蔡声泽，等.基于鲁棒控制的自适应分数阶梯度优化算法设计（英文）[J].控制理论与应用，2024，41（7）：1187-1196.

[10]Turali Y M，Koc T A，Kozat S S .Optimal stochastic gradient descent algorithm for filtering [J].Digital Signal Processing，2024，155 104731-104731.

作者简介：王瑞琳，女，河北省沧州市，汉族，(2004.02）本科在读，研究方向：测控技术与仪器；

于鹏程，男，河北省保定市，汉族，(2002.10）本科在读，研究方向：智能医学工程；

王新博，男，河北省唐山市，满族，(2004.12)，本科在读，研究方向：自动化；

张茹（通讯作者）女，河北邯郸人，汉族，(1989.2)，硕士，讲师，研究方向：应用数学与人工智能。