变式训练在高中数学解题教学中的应用探究

何佳莉
西华师范大学　四川南充　637000

摘　要：在如今高中数学教育大环境中，双减政策的实施使得中小学教学面临着前所未有的挑战，需要我们对现有的教育教学方式进行创新与改革，这极大推动了高中数学教学的发展，也意味着高中数学的教学需要更有效率，更有质量。而应用变式训练就成为解决当前教育教学困境的方案之一，提高了教师教学质量，减轻了学生学习负担。基于此背景，本文旨在说明变式训练如何在高中数学中成为助推器，以及我们如何使用变式训练这一助推器使之成为高中数学学习的加速剂，进一步探究变式训练教学教法。

关键词：高中数学；教学方法；变式训练；教学实践探究

1. 变式训练概述

1.1 变式训练的概念

所谓变式训练，即“变式 + 训练”。变式的前提是其他教学条件不变，变式的含义是变化概念和规则，紧接着通过练习来训练学生掌握知识点以及解题的能力。在高中数学的教育教学中，变式训练是非常常见的一种教师用于传授新知和检验旧知的方法，也是知识转化为技能的关键途径 [1]。

1.2 变式训练的类型

1.2.1 一题多解，培养学生发散性思维

一题多解是变式训练的一种，俗话说“一千个读者就有一千个哈姆雷特”，高中数学亦是如此。同一道数学题，每个学生都有自己的想法和解题思路，看待问题的角度也是不同的，从而就会衍生出多种解题方法。对于教师而言，教师需要去培养学生的发散性思维，让学生具备一题多解的意识和能力，这样的意识与能力在高中数学的学习中发挥着极大的作用。对于学生而言，拥有一题多解的意识与能力是学生们需要去努力的，这不仅能够帮助学生对知识点的掌握更为系统完善，还能够培养学生全面看待问题的能力 [2]。

1.2.2 一题多变，提高学生应变能力

数学题的经典形式为条件加问题，而我们只需要稍微改动题目中的一个条件，这道题考查的知识点和解决方法思路有时就会截然不同，这也从侧面说明了读题、理解题以及注意条件的重要性 [3]。在高中数学的教学中经常出现答非所问的现象，这就是学生对于题干中的条件和题目考察的知识点把握度不够准确造成的。对于教师而言，在运用一题多变类型的变式训练进行教学时，必须要对自己改变题目中的条件是为了考察哪一知识点，是为了让学生掌握什么样的解题方法有清晰的认识，并且不是随意的改变题干中的条件，要有目的，要创新。对于学生而言，教师通过一题多变的形式对学生进行考察，可以提高学生分析和理解问题的能力，领悟到题干中一些条件变化，结果就会截然不同的微妙变化，感受到数学的魅力与内涵，同时增强学生的应变能力。

1.2.3 一题多问，加深学生学习印象

一题多问不同于我们常说的举一反三，一题多问侧重于对某一个知识点的理解运用，而举一反三则和一法多用比较相似，学习一种方法就要学会用这一种方法去解决其他不同的问题。对于教师而言，一题多问需要教师针对某一知识点连续设问，也就是我们常说的打破砂锅问到底，从而达到学生完全掌握这一知识点的效果。对于学生而言，学生在教师进行一题多问的过程中，可以感受到教师多次设问的用意，对教师讲授的知识点也更加清晰，从而加深学生的学习印象。

2. 变式训练应用现状

2.1 变式训练在高中数学的应用案例

当前社会中的教育教学虽说在不断改革与创新，但总归还是相对保守，尤其是近几年来一些学校为了提高升学率而大搞题海战术，忽视了学生能力的培养和教学效率，

而变式训练的应用对于改变这样的现状发挥了极大的作用。下面将针对高中数学中双曲线的标准方程及应用的学习，列举一些变式训练在高中数学中的应用案例。

一题多解的应用案例：

例 1 与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$有共同的渐近线，且过点$\left(-3,2\sqrt{3}\right)$，求双曲线方程。

解法一：当焦点在 x 轴上时，设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，由题意得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\\ \frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$a^2=\frac{9}{4},b^2=4$，所以双曲线的方程为：$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$；当焦点在 y 轴上时，设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，由题意，得$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{4}{3}\\ \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$a^2=-4,b^2=-\frac{9}{4}$（舍去）

综上所得，双曲线的方程为$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$。

解法二：设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\gamma(\gamma\neq 0)$将点$\left(-3,2\sqrt{3}\right)$代入，得

$\gamma=\frac{1}{4}$ 所以双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$，即$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$。

总结：已知双曲线的渐近线求双曲线的方程，关键是求a，b，在解题过程中应熟悉各元素$(a，b，c，e$及准线$)$之间的关系，并注意方程思想的应用。同样一道题，都考察的是求双曲线方程这一知识点，但是有两种不同的解法，让学生在解题的过程中发散思维，养成多角度看待问题的好习惯。值得注意的是，在这样的例题中，学生通过不同方法解决此题，在这样的过程中去比较不同方法的使用，从而选择最便捷最有效率的方法，提高学生的学习效率。

一题多变的应用案例：

例 2 已知F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点与右焦点，过$F_1$并且与 x 轴垂直的直线交双曲线的左支于A、B两点，若ΔABF_2是正三角形，求双曲线的离心率。

在对双曲线离心率进行一个简单的求解之后，为了加深同学们对离心率的理解应用进行变式，拓展到求解有关双曲线离心率的取值问题和最值问题的学习。

变式 1 过双曲线$C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1(a>0，b>0)$的右焦点作一条与其渐近线平行的直线，交$C$于点$P$。若点$P$的横坐标为$2a$，则$C$的离心率为________。

变式 2 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，点$P$在双曲线右支上，且$|PF_1|=4|PF_2|$，则此双曲线离心率$e$的最大值为________。

总结：双曲线的离心率是我们在学习双曲线几何性质的一个重要参数，离心率的取值范围和最值问题关键是要找到双曲线几何量的不等关系，如定义、韦达定理等，从而求出e的范围是由条件寻求a、c满足的关系式，从而求出$e=\frac{c}{a}$。此类型的题由最基本的求双曲线的离心率逐渐拓展到有关双曲线离心率的取值问题和最值问题的学习，逐步填满有关双曲线离心率的知识框架，使学生对于双曲线的学习更加完善。

一题多问的应用案例：

例 3 求双曲线$16x^2-9y^2=144$的实轴长和虚轴长、顶点坐标、焦点坐标、渐近线方程与离心率。

总结：为什么进行一题多问？目的就是为了让学生全面系统的学习某一知识点。此题涵盖了有关双曲线的基本知识点，由一个双曲线的解析式，引出对于双曲线多方面的考察，让学生全面系统的认识双曲线，从而对双曲线的知识点进行全面的概括与把握。

2.2 变式训练解题思路的应用

例 4 （1）已知椭圆的一个焦点将其长轴分成两段，且两段之比为$\sqrt{3}:\sqrt{2}$，求该椭圆的离心率；

（2）已知椭圆的一个焦点到长轴左端的距离为 10，到长轴右端的距离为 4，求该椭圆的离心率。

总结：求椭圆离心率的方法有很多，椭圆方程已知时根据焦点位置确定a^2,b^2，再利用离心率的公式求解；椭圆方程未知时，根据条件建立a、b、c、e满足的关系式，再化简出a、c的齐次方程，进而对e进行解方程[4]。不同

的方法适用于不同的已知条件，在教学过程中教师应教会学生根据题干条件判断出此题应该使用的解题方法。

变式 1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 为椭圆的焦点，M 为椭圆上一点，若 $\angle MF_1F_2=70^\circ,\angle MF_2F_1=20^\circ$，求椭圆的离心率 [5]。

总结：这样的变式杂糅了椭圆的定义、正弦定理、等比定理、三角变换等多种知识，这也是对学生综合能力的考察，能够提高学生综合运用知识的能力。

变式 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，若有 6 个不同的点 F 在椭圆上，并且让 ΔF_1F_2F 为等腰三角形，求椭圆的离心率的取值范围。

总结：这样的题需要分两种情况进行讨论，需要学生明确掌握等腰三角形的性质定义，联系圆与椭圆位置关系的判断等知识点，建立起 a、c 的不等式，最后解不等式就可以得到椭圆离心率的取值范围。

总的来说，变式训练解题思路在高中数学中的应用发展的还是比较成熟完善，对应的题型有对应的解法，对于变式问题的处理也比较合理规范，是的变式训练在高中数学的教学中发挥更大的作用。

3. 变式训练的教学方案

变式训练在高中数学中的应用可以说是十分广泛成熟了，教师知道运用变式训练讲授新课和复习旧知，学生理解能够通过变式训练强化自己对知识点的理解，都明白变式训练的重要性，而对于如何应用变式训练，怎样对变式训练进行教学还比较模糊，使得变式训练的效果并未发挥到极致，下面是我所提出的关于变式训练的四大教学方法。

3.1 针对性教学

所谓针对性教学就是教师针对某一重要的知识点，通过变式训练的形式展开教学，这样既可以突出本章节的重难点，又可以使学生透彻全面的掌握某一知识点。以下题为例：

例 5 已知函数

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1),g(x)=ax+\frac{x^2}{2}-x\cos x$$

(1) 当 $x\geq 0$ 时，总有 $f(x)\leq\frac{x^2}{2}+mx$ 求 m 的最小值；

(2) 对于 $[0,1]$ 中任意 x 恒有 $f(x)\leq g(x)$，求 a 的取值范围。

变式 已知函数：

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\,\mathrm{h}\ x-a,g(x)=e^x-x-1$$

(1) 当 $x\in[1,\ e]$时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 对于任意的 $x_1\in[0,1]$ 都存在唯一的 $x_2\in[1,e]$ 使得 $g(x_1)=f(x_2)$，求实数 a 的取值范围。

总结：此类题为导数中的含参问题，考查利用导数解决不等式恒成立问题，考查学生的逻辑推理能力和计算能力，而变式则考查了利用导数求函数的最值，分类讨论思想，等价转化思想等。在导数含参问题的教学过程中，即可采用针对性教学，针对含参问题的解题知识点设置变式训练，学生在对例题以及变式训练进行思考，尝试解决的过程中，对导数含参问题的形式有具体的认识，从而总结出导数含参问题的解题方法：像“对于任意的 $x_1\in[0,1]$都存在唯一的 $x_2\in[1,e]$使得 $g(x_1)=f(x_2)$”已知条件，一般是转化为两个函数的值域得包含关系，口诀是：

任意是存在的子集。

3.2 启发性教学

所谓启发性教学，就是在运用变式训练进行高中数学的教学时，不需要明确的将题型进行变式，而是让学生成为变式的主体。在给出相关想要考察学生知识点的例题之后，引导学生自主思考，启发学生自己去思考与之相关的知识点，让学生自己对知识点进行提问，尝试对例题进行变式。以下题为例：

例 6 在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$

(1) 若在此三角形中，三角形还满足以下给出的四个条件中的三个条件：①$a=7$，②$b=10$，③$c=8$，④ΔABC的面积$S=10\sqrt{3}$，请指出这三个条件，并说明理由；

(2) 若 $a=3$，求 ΔABC 周长的取值范围。

例 7 在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $B=2A,c=\frac{9}{4}a$，在 ①$a=2$②$b=\sqrt{13}$③ΔABC 的面积为 $\frac{9\sqrt{39}}{16}$ 这三个条件中任选一个，补在上面条件中，若问题中三角形存在，求 ΔABC 的周长；若问题中三角形不存在，说明理由 [6]。

例 8 在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为

a,b,c，$a\cos B+b\cos A=2c,c=\sqrt{7}$，且 ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 ΔABC 的周长为（　　）

$A.1+\sqrt{7}$　　$B.2+\sqrt{7}$　　$C.4+\sqrt{7}$　　$D.5+\sqrt{7}$

这是一组针对解三角形周长问题而设计的一系列变式训练，在教学过程中我们就需要使用启发性教学法。前两个例题是给出条件，让学生自由组合条件使其满足题意，学生在这个过程中类似于在自己出题自己解决，同时提出的问题还必须符合题意，要有可行性和可解性，让学生对解三角形这一板块的认识更加深入，对三角形的基本要素以及性质的掌握更加灵活全面。第三个例题是求三角形周长的常规例题，这时教师需要做到的就是启发学生思考该题的已知条件还可以如何设问，让学生回顾解三角形的知识点，此题很明显根据已知条件改为已知三角形的周长，对三角形的面积进行求解，经过这样一个系统的启发性教学，学生对于解三角形周长问题的掌握亦会变得牢固全面，这也就是常用的礼节性学习，达到的效果也会更好。

3.3 发散性教学

发散性教学即是在高中数学的教学过程中注意对知识点的发散性学习，由一个知识点发散到多个知识面，这里面既包括了教师对数学知识点的拓展延伸，又包括了学生思考问题的发散思维，也即是我们常说的让学生学会一题多解。在这样的教学过程中，教师不能刻意的去询问学生还有没有其他解决方法，而是应该通过罗列出已知条件，去强调一些关键的转折条件，并辅之以语气助词，使学生注意到通过这些已知条件可以联想到哪些知识点，这些知识点的共通之处在哪，可以通过哪些渠道和方法去解决这样的问题，在这一过程中学生的发散性思维能力也就被学生自然而然的建立和巩固了。以下题为例：

例 9（2021 新高考 I 卷第 16 题）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格 $20dm\times12dm$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10dm\times12dm,20dm\times6dm$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240dm^2$ 对折 2 次共可以得到 $5dm\times12dm,10dm\times6dm,20dm\times3dm$ 三种规格的图形[6]，它们的面积之和 $S_2=180dm^2$ 以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 ______；如果对折 n 次，那么 $\sum_{k=1}^{n}S_k=$ ___ dm^2。

分析：（1）按对折举例即可；（2）根据规律可得 S_n，再根据错位相减法得结果。

总结：在此题的讲解中，教师除了对错位相减法进行详细的说明应用，还应该引导学生进行发散性思考，从而归纳总结出数列求和的常用方法，如公式法、错位相减法、分组求和法、裂项相消法等等，以及什么样的情境下采用什么样的方法，让学生对数列求和的方法有整体把握。

3.4 诱导带动性教学

诱导带动性教学也就是教师在应用变式训练讲授新知和回顾旧知的过程中要循循善诱、循序渐进，前面所提到的发散性教学固然重要，但是必要时也需要教师成为助推剂，在遇到难题或者是学生现有能力与问题难度不相匹配时，就需要教师发挥主导作用，引导学生打开思维，抓住关键条件，找到题目所要考察的知识点，一步一步的带领学生寻找问题的答案，在解题的过程中对新知识有初步

的了解亦或是对旧知进行深刻的巩固复习。以下题为例：

例 10 将函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 图象上的每个点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则在 $g(x)$ 图象的所有对称轴中，离原点最近的对称轴为[7]________。

分析：在进行三角函数的图象变换的讲解时，需要注意的是变换的永远是变量自己本身，变换前后的两个函数的函数名称是否相同，需要保持名称一致才能进行相互转换。在此题中，还需要注意的是变换顺序，此题可以先进行横坐标缩短为原来的一半，在进行将图像向左平移，从而得到新函数。

总结：在讲解这道题的过程中，教师首先需要知道学生初次接触到三角函数变换问题，还处于懵懂茫然的状态，不知道该如何下手，从哪里开始作为切入点去入手，这时教师就应该采取诱导带动性教学法，带着学生去一层一层的掀开问题的本质、解决问题。

4. 变式训练的作用意义

变式教学实质上对于教师来说是一种挑战，需要教师对于知识点有全面彻底的把握，对知识点的灵活运用与融汇贯通程度比较高，但是正确实施变式教学后的收获也是

会让人出乎意料的，为教师和学生双双减轻负担和压力，教师以比较轻快的速度进行教学，学生则在轻松欢快的氛围中学习数学，这是目前高中数学的学习需要到达一种境界和模式。教师可以使用针对性教学法，让学生快速把握

重难点知识；教师通过使用启发性教学，培养学生主动思考的能力；教师可实施发散性教学，培养学生的创新精神，打开学生的思维和眼界[8]；教师亦可通过诱导带动性教学，让学生体会到探索数学的乐趣，从而对数学保持新鲜感，提高学习数学的效率。

参考文献：

[1] 武龙锁.变式训练在高中数学解题教学中的应用[J].数学学习与研究,2020(06):127.

[2] 温庆文.变式训练在高中数学解题教学中的应用浅谈[J].数学学习与研究,2020(06):128.

[3] 李玉雪.浅谈变式训练在初中数学教学中的应用与思考[J].名师在线,2022(24):61-63.

[4] 王婵.变式训练在高中数学解题中的渗透[J].数学大世界(上旬),2021(08):33-34

[5] 樊宏标.利用椭圆的定义解题例析[J].中学生数理化(高中版),2004(05):21-23.

[6] 刘护灵.以“形”变“数”，以“数”解“形”——2021年高考全国数学Ⅰ卷第16题[J].广东教育(高中版),2021(10):26-27.

[7] 王丽.翻转教学在函数 y=Asin(ωx+ϕ)图像教学中的应用[J].现代职业教育,2019(20):140-141.

[8] 周婷婷.核心素养视角下的小学英语单元整体设计策略[J].英语画刊(高级版),2019(23):12.