

基于合作探究的初中数学项目式学习实践与思考

——以《圆的滚动问题》为例

李燕华¹ 张卫²

1. 江苏省常州市新北区小河中学 江苏常州 213138

2. 江苏省常州市新北区教师发展中心 江苏常州 213032

摘要: 本文以圆的滚动为例,探讨了基于合作探究的初中数学项目式学习的实践与思考.通过分析圆的滚动这一实际问题,引导学生运用数学知识进行探究与合作,从而提高学生的数学素养和实际应用能力.文章首先介绍了项目式学习的背景和意义,接着阐述了圆的滚动项目的实施过程,然后分析了项目式学习在初中数学教学中的优势和存在的问题,最后提出了相应的改进措施.

关键词: 合作探究; 初中数学; 项目式学习; 圆的滚动

《义务教育数学课程标准(2022年版)》指出:“项目学习教学以用数学方法解决现实问题为主,其目标是引导学生发现解决现实问题的关键要素,用数学的思维分析要素之间的关系并发现规律,培养模型观念,经历发现、提出、分析、解决问题的过程,培养应用意识、创新意识和合作意识。”初中数学项目式教学中,以学生为主体,教师组织学生围绕项目任务展开学习和探究,使学生掌握数学知识的同时有效培养高阶思维。

《圆的滚动问题》是笔者参加江苏省重点课题《区域推进初中数学项目式学习的实践研究》研究期间上的一节公开课.本节课将课堂教学和实践活动有机结合,带领学生深入体验现实世界,增强学生对数学知识的理解 and 应用,体现以问题为导向、以探究为核心、以共同发现为形式、以发展思考能力为目标的教育理念,有助于学生形成思考方法、判断能力、批判性思维、创新意识和团队协作能力,提高学生的数学素养。

1 项目式学习在初中数学学习中的意义

1.1 项目式学习的定义和特点

在全球关注终身学习和核心素养发展的大背景下,项目式学习受到了国内外学者的广泛关注.夏雪梅教授提出对学习素养视角下项目式学习的界定:学生在一段时间内对与学科或跨学科有关的驱动性问题进行深入持续的探索,在调动所有知识、能力、品质等创造性地解决新问题、形

成公开成果中,形成对核心知识和学习历程的深刻理解,能够在新情境中进行迁移。

初中数学项目式学习要具备以下特征:

1. 数学项目化学习注重情境的真实性.
2. 数学项目化学习设计驱动性问题,使任务具有挑战性.
3. 数学项目化学习强调学生学习过程的完整性.
4. 数学项目化学习成果的创造性.

1.2 项目式学习对初中学生数学学习能力的提升作用

数学项目式学习是以数学核心知识为载体,学生通过探究等数学学习实践对真实、挑战性的驱动性问题进行持续探究,运用问题解决等高阶认知策略,创造性地解决问题、形成成果,提升数学核心素养,促进深度学习的学习模式。

1. 运用认知策略促进学生高阶认知.

项目式学习在学习过程中学生产生信息收集、组织、存储、巩固、比较、分类、抽象、推理等低阶认知,促进学生的问题解决、创见、决策、实验、调研、系统分析等高阶认知,整合各种认知策略,促进学生学习。

2. 设计学习实践让学生经历有意义的学习.

项目式学习要锻炼和培育学生在复杂情境中的灵活的心智转换,要让学生在“做”中“学”,学生在实践中才能产生问题,才能提出问题、分析问题、解决问题。

2 “圆的滚动问题”在初中数学教学中的实践

2.1 “圆的滚动问题”设计理念与目标

本项目设计理念是促进学生理解和掌握圆的知识,通过合作探究、演示、作图、汇报结论等,激发学生的学习兴趣,提高学生的学习效果,更好地服务于数学教学.

本项目整体驱动问题:圆在不同图形上滚动的圈数和路径分别是什么?

本项目设计目标:

1. 通过自主学习,探究圆在直线、折线上滚动的轨迹,并画出图形,为进一步研究作铺垫.
2. 类比探究圆在多边形的边上滚动的轨迹,并会求路径长度,学生小组展示学习成果.
3. 合作探究圆在圆外滚动的轨迹,并会求路径长度,学生小组展示学习成果.
4. 运用所学的知识解决视频中提出的问题,展示学习成果.

2.2 “圆的滚动问题”学生角色与责任

学生是项目实施的主体,为了让学生顺利完成任务,在此项目研究中,先按学生能力进行分组,保证每个组学生的能力相当.每个组组长负责协调分工,包括:信息的收集、整理、分析、汇报等,每个人都是项目的主人,每人都有各自的职责与责任.

【圆的滚动性项目设计】

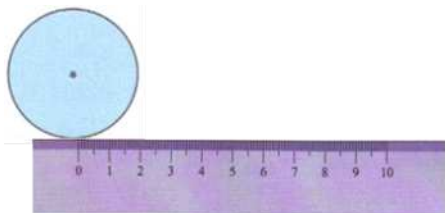
课前学生观看视频,引入本节课探究的主题:



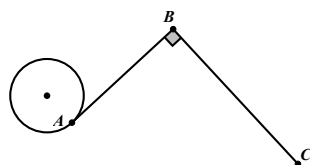
神奇烧脑悖论之车轮悖论,周长不同的同心圆,为何能走出同样距离.mp4

探究一、圆在线段上滚动

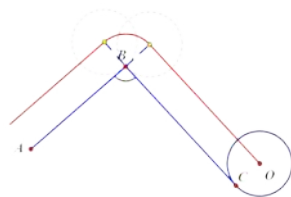
问题 1: 如图(1), 将一块半径为 r 的圆片在刻度尺上滚动一圈, 则这块圆片滚动的距离为_____.



(1)



(2)



(3)

【学生活动】学生在圆形纸片上标注起始点,同伴合作,一人按住尺,同伴沿尺的边沿滚动一周,再量出圆的半径,猜想滚动的距离与半径的关系,请学生代表展示探究结论——圆在直线上滚动一周的路径是线段,路径长度是圆的周长.

【教师组织】教师用几何画板演示圆运动的路径,让学生直观感悟.

问题 2: 如图(2), 将一块半径为 1 的圆片, 按如图方式从点 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 滚动, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, 这时这块圆片的圆心在运动过程中路径的长度是_____.

【学生活动】学生小组讨论、交流圆心运动的路径,并在学案纸上画出运动的路径,并请各组学生代表展示. 组 1: 圆在 AB、BC 上运动的路径是线段, 圆在点 B 处滚动时形成一个正方形; 组 2: 在点 B 处滚动时, 圆要从与线段 AB 相切转到线段 BC 相切上, 所以是圆心绕着点 B 旋转形成一条弧, 弧上的点到点 B 的距离都相等, 所以是以 B 为圆心、1 为半径圆心角为 90° 的弧, 可以画出如图(3)的图. 学生听后都顿悟, 并给予热烈的掌声.

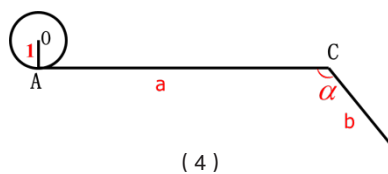
【教学说明】要完成驱动问题, 首先让学生小组合作, 借助尺、《实验手册》中的圆形纸片等探究圆在直线、折线上运动的路径, 并提出猜想, 会画出圆在滚动过程中运动的轨迹, 学会找到圆心滚动时的轨迹, 并找到计算圆心运动的路径长, 充分发挥学生的协助能力.

2.3 学生探究数学知识的过程并归纳结论

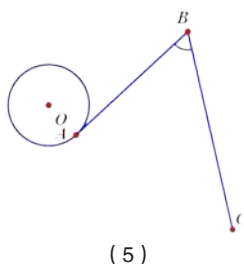
在数学项目化学习中, 教师应组织引导学生在真实的问题情境中, 完整地经历“问题分析—信息处理—问题解决—成果展示”这一非线性的探究过程, 使学生能够像数

学家一样，在做中学结合，在与真实情境的持续交互中建构知识、能力和价值观，获得真实的学习体验，产生创造性的数学理解的成果，在用数学的眼光观察世界、用数学的思维思考世界、用数学的语言表达世界的同时，感受数学学习的意义和价值，提高数学学习的能力。

变式 1: 如图 (4)， $\angle ABC=60^\circ$ ，其余条件保持不变，这时这块圆形纸片从点 A 滚动到点 B，圆片的圆心在运动过程中路径的长度是_____。



(4)



(5)

变式 2: 若 $\angle ACB=\alpha^\circ$ ，其余条件不变，如图 (5)，这时这块圆形纸片从点 A 滚动到点 B，圆片的圆心在运动过程中路径的长度是_____。

【学生活动】经过探究，学生知道：圆在直线、折线上滚动圆心滚动的路径的轨迹，学生继续合作探究发现：在拐点处圆心绕拐点运动的弧所对圆心角的度数与拐角之间具有互补关系，从而可以求出弧长。

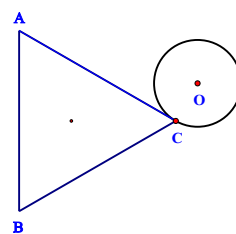
【教学说明】教师通过从具体数值到一般的问题，让学生自主建立联系，培养学生利用从特殊到一般、分类思想探究新知识，发现新结论，从而增强学生团队合作意识、沟通交流能力，发展学生的抽象能力、模型观念、推理能力。

探究二、圆在多边形的边上滚动

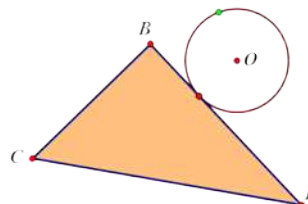
问题 1: 如图 (6)，圆片的半径为 1，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4，这时这块圆形纸片沿 $\triangle ABC$ 的外侧滚动一周。

(1) 请用尺规画出圆心 O 经过的路径；

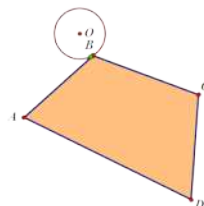
(2) 圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____。



(6)



(7)



(8)

【学生活动】学生交流后，组 3 展示：圆在正三角形外侧滚动，类似于在折线上滚动，主要是画出顶点处滚动的弧，由于等边三角形每个内角是 60° ，即每个顶点处圆心角的度数都是 120° ，然后可以求出三条弧长；组 4 提出：此题每条弧的圆心角都是 120° ，三个圆心角的和是 360° ，把三条弧拼在一起正好是一个圆，圆心运动的路径为三角形周长与一个圆的周长之和。

【教师组织】教师巡视、引导学生探究，并对薄弱的组进行辅导并提问：你们能发现这里的三个角之和是 360° 与什么有关吗？

生 5: 就是三角形的外角和。

师：请问此处 120° 角是不是外角？

学生答“不是，但是角的度数等于外角和。”

师：你能说理吗？

【教学说明】通过问题设计，引导学生进一步理解圆在正多边形的顶点处从一边滚到另一边时，圆心角的度数与内角的关系，为后续学习打下基础。

变式 1: 如图 (7)，将等边三角形改为任意三角形，且它的周长为 12，圆半径为 1，则这块圆片沿 $\triangle ABC$ 的外侧滚动一周，圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____。

变式 2: 如图 (8), 将任意三角形改为任意四边形, 且它的周长为 12, 圆半径为 1, 则圆片沿四边形的外侧滚动一周, 圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____.

【学生活动】学生继续合作探究. 组 6 学生甲发现:

$$\frac{4 \times (180 - n) \pi}{180} = \frac{(720 - 360) \pi}{180} = 2\pi$$
 圆绕任意四边形外围滚动一周, 拐角处旋转的度数和正好是 360° , 圆心在拐角滚动——即旋转的路径正好等于一个圆的周长.”

组 7 学生乙反驳: “她在此处讲错了, 任意四边形每个顶点处内角不一定相等, 四个顶点处的弧长和不能用 $\frac{4 \times (180 - n) \pi}{180}$ 表示.”

【教师组织】教师提问“甲, 你有什么想说的吗?”

甲说“我第一步错了, 从第二步开始我又绕出来了, 因为每个顶点处圆周角都是 360° , 圆从相邻的两边拐过去, 圆在滚动中, 与多边形的边都是相切的, 过切点的半径与每条边的夹角都是 90° , 圆心从一条边拐到另一条边时: 因为圆心到四边形顶点的距离都相等, 所以圆心运动的距离是绕该顶点旋转的弧长, 旋转的角度与这个顶点处的内角和为 180° , 而四边形的内角和是 360° , 所以我的第二步及后面的过程是对的.”

师问“乙, 你点评一下.” 乙说“她刚刚的回答是对的, 第一步绕错了, 第二步开始就对了, 后面解题时要多考虑一步.” 教师呈现下面的思考.

【教学说明】学生全程参与合作探究活动, 随着探究的深入, 学生的思维进入紧张的运转阶段. 此时, 教师带领学生从数学内部入手, 找到旋转角与多边形的内角关系, 从而得出一般的结论. 课堂中, 老师让学生甲继续点评自己的思考过程, 让她发现问题, 并自我纠正, 给予充分的内化时间, 促进学生思维. 课堂提问由学生提出, 也由他们解答, 教师适时点拨. 在生生、师生合作交流中, 几何运动问题的解决途径在学生头脑中生根发芽.

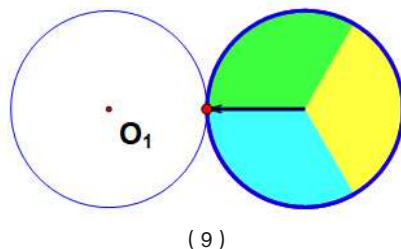
感悟: 半径为 r 的圆形纸片沿着周长为 a 的任意 n 边形外围滚一周, 圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____.

【教学组织】学生运用上述结论, 写出结果. 教师提问“你能说明为什么吗?” 组 8: $180^\circ \times n - 180^\circ \times (n-2) = 360^\circ$ 所以圆心滚动的路径为: “一个圆的周长与多边形的周长和.” 其他学生给予掌声.

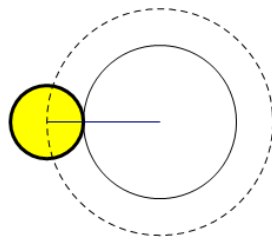
练习: 半径为 2 的圆形纸片沿着周长为 15 的五边形外围滚一周, 圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____.

探究三、圆在圆上滚动

问题 1: 如图 (9), 将两块同样大小, 半径都为 1 的圆片放在桌上, 固定其中一块, 而另一块则沿着其边缘滚动一周, 这时圆片的圆心在运动过程中路径的长度为_____, 滚动的圆滚动了_____圈.



(9)



(10)

【学生活动】学生小组讨论, 组 3 展示: 滚动圆在滚动过程中, 圆心到定圆圆心的距离都不变, 所以滚动圆圆心运动的轨迹是圆: 以定圆圆心 O_1 为圆心, 以两个半径之和 2 为半径的圆, 滚动的路径为: 4π , 滚动圆的滚动的圈数:

$\frac{\text{滚动圆的周长}}{\text{定圆周长}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. 学生给予热烈的掌声.

练习: 如图 (10), 如果换成两块大小不等的圆形纸片, 半径分别为 1、2, 如图所示, 其余条件不变, 这时滚动的圆形纸片圆心在运动过程中路径的长度为_____, 滚动的圆滚动了_____圈.

【教学说明】通过练习让学生明确两个圆的半径不等时, 滚动圆的圆心运动的路径及长度, 关键是确定: 定点与定长, 从而知道如何画圆, 体现思维的广阔性和深刻性.

探究四、课堂小结

1. 本节课从知识上, 你有哪些收获?

2. 从数学思想上, 你有什么收获?

3. 从学习方式上, 你有什么感悟?

4. 你能解决视频中问题: 两个半径不同的同心圆为什么会走出相同距离?

【教学说明】本节课学生一步步探究知识, 逐渐生成思维导图式板书, 最后引导学生思考本节课采用什么学习

方式进行的,让学生感悟合作探究式的学习方式,促进学生会用已有知识探究学习新知识,最后让学生解决视频中的问题.学生丙“视频中半径不同的同心圆滚动一周同时到达某个位置,而实际上大圆的周长和小圆的周长不同,就说明小圆出现“连滚带爬”的现象,不然这两个同心圆都滚动一周不可能同时到达终点.”此设计让学生不仅学习了数学知识,还学会用数学知识解决实际问题.

3 圆的滚动问题教学思考

3.1 圆的滚动问题中出现的问题与挑战

在圆的滚动项目设计中,我们也会遇到一些问题和挑战,项目式学习教学所涉及的问题主要是现实世界中具有开放性的问题,问题解决需将现实问题转化为数学问题.解决数学问题要引导学生提出合理假设、预测结果、选择合理的数学方法,本项目是以知识为载体,缺少了一些开放性问题设计,同时也考虑本项目的选择是否合理,学生在探究过程中参与的积极性是否高,合作探究是否真实有效等问题.

3.2 优化圆的滚动问题,使其更具实践性和创新性

在圆的滚动项目设计中,在课前播放视频《车轮悖论——周长不一的同心圆,为何能走出同样距离》,引导学生思考,然后再引入本节课的探究主题,探究结束后,让学生总结:你能否用今天所学的知识解决这个问题?如果课堂中能解决,学生口头回答,如果不能解决,让学生课后查阅相关资料,并结合探究结论解决问题,使这个项目更具有实践性,培养学生的应用意识和创新意识.在这一过程中,不仅关注结果性评价,在项目探究过程中还应关注对学生的表现性评价,从而发现探究过程是否真实有效的发生.

3.3 在其他数学主题中应用类似项目式学习的建议和思考

项目式学习的设计应遵循“制定目标,预设方案——设计任务群,推进探究过程——方案论证,讨论归纳——展示研究成果”的活动流程.本项目探究时设计了圆在线上滚动——圆在多边形的边上滚动——圆在圆上滚动,此任务群要指向具有逻辑联系的学科知识,要能承载学生思维能力的发展,同时也要适当提供项目探究的脚手架,帮助学生理清探究思路,避免学生无序探究.

4 结论

4.1 合作探究的初中数学项目式学习的实践经验与收获
基于合作探究的初中数学项目式学习,不仅符合新课

程改革的要求,也符合学生身心发展的规律.初中数学项目式学习开展过程中,教师应顺应新课程教学要求,设计出符合学生发展的学习计划,并认可项目式教学的育人价值,将其灵活融入课堂教学中,让学生真正成为课堂的主人,教师凸显主导地位,让学生真正开展真合作、真探究.教师在设计项目活动和流程中,制定合理的小组合作计划,增强学生之间的协作,以增强学生的团队协作意识,使学生的数学素养得到显著提升.

4.2 合作探究对数学教学的重要性与可持续发展性

以合作探究式的方式开展项目探究,更体现学生是学习的主体,时刻保持好奇心和求知欲.课堂中把时间还给学生,让他们大胆的探究、大胆的表达,教师及时给予点评,让“教—学—评一体化”在课堂中真正体现.在项目推进过程中,学生与同伴开展有效且深入的讨论与交流,便会找到成就感和价值感.良好的活动体验有利于驱动学生持续性学习,可以有效地培养学生的实践能力、创新精神和合作意识,为他们的未来发展奠定坚实的基础.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 陈上岭.合作学习背景下初中数学项目式教学探究[J].数理天地(初中版),2023,(21):41-43.
- [3] 李胜平.基于核心素养的初中数学项目式学习实践探究——以“节约空间,神奇收纳我创作”为例[J].创新人才教育,2023,(04):13-17.
- [4] 葛善成,李明树,王晓峰.初中数学项目式学习的实践与思考——以“定宽曲线”的教学为例[J].中国数学教育,2023,(Z3):9-13.
- [5] 夏雪梅.项目化学习设计:学习素养视角下的国际与本土实践[M].上海:华东师范大学出版社,2018:10,11,105,131.
- [6] 朱庆茹.指向核心素养的初中数学项目化学习设计与实施[J].数理天地(初中版),2023,(23):81-83.

作者简介:

李燕华(1979—),汉,本科研究方向:课堂教学实践
基金项目:本文系江苏省教育科学规划2023年度重点课题“区域推进初中数学项目式学习的实践研究”研究成果,立项编号:B/2023/03/129.