“数”与“形”的转化在中考压轴题中的妙用研究

郭爱军
甘肃成县城关中学　甘肃陇南　742500

摘　要：本文聚焦中考数学压轴题，深入探讨“数”与“形”转化的应用。通过分析函数、几何、代数与几何综合等类型压轴题，阐述数形转化如何将抽象问题直观化、复杂问题简单化，帮助解题者突破思维障碍，提高解题效率与准确性。研究对中考数学备考及数学思维培养具有重要参考价值。

关键词：数形转化；中考压轴题；数学思维；解题效率

引言

中考数学作为初中阶段数学学习的总结性考试，其试卷结构合理且层次分明，压轴题作为试卷中综合性最强、难度最大的部分，集中考查学生对数学知识的综合运用能力、逻辑思维能力与创新解题能力。它不仅是对学生数学素养的全面检验，更是区分学生数学水平的关键题型。在众多解题方法中，“数”与“形”的转化凭借其独特的优势，成为攻克压轴题的关键利器。华罗庚先生曾言：“数缺形时少直观，形缺数时难入微。”这句话精准概括了数形结合的重要性。在中考压轴题中，巧妙运用数形转化，能将抽象的数学语言转化为直观的图形，或将复杂的图形问题转化为精确的数量关系，从而为解题开辟新的路径，让学生从不同角度审视问题，找到更简便的解题方法。

1 函数类压轴题中的数形转化

函数是初中数学的核心内容，它贯穿于整个初中数学学习的始终，也是中考压轴题的常考板块。函数通过数量关系来描述变量之间的变化规律，而其图象则是这种变化规律的直观体现。在函数问题中，数形转化主要体现在函数图象与解析式的相互转换上。通过绘制函数图象，能直观呈现函数的性质，如单调性、极值、对称性等，进而帮助解题者快速找到解题思路。

1.1 二次函数压轴题中的数形转化

二次函数是函数中的重要类型，其图象是一条抛物线，具有丰富的性质。在中考二次函数压轴题中，常涉及函数图象与几何图形的综合问题。例如，已知二次函数图象与坐标轴的交点情况，求函数解析式或相关几何图形的面积。若仅从代数角度出发，通过设函数解析式 y=ax2+bx+c（a =0），联立方程求解 a、b、c 的值，过程往往繁琐且易出错。而运用数形转化，先根据已知条件画出函数图象的大致形状，确定关键点的位置，如顶点坐标 (−2ab,4a4ac−b2)、与 x 轴的交点坐标（通过令 y=0，解方程 ax2+bx+c=0 得到）、与 y 轴的交点坐标 (0,c) 等，再结合几何图形的性质，如三角形面积公式 S=21ah（a 为底，h 为高）、相似三角形性质（对应边成比例，对应角相等）等，就能更直观地分析问题，简化计算过程。比如，已知二次函数图象与 x 轴的两个交点坐标分别为 (x1,0) 和 (x2,0)，与 y 轴的交点坐标为 (0,c)，求该二次函数解析式。若采用交点式 y=a(x−x1)(x−x2)，再代入 (0,c) 求出 a 的值，比一般式联立方程求解更为简便。而且在求由二次函数图象与坐标轴围成的三角形面积时，直接根据图象确定底和高，利用面积公式计算，避免了复杂的代数运算，提高了解题效率。

1.2 一次函数与反比例函数结合压轴题中的数形转化

一次函数 y=kx+b（k =0）的图象是一条直线，反比例函数 y=xk（k =0）的图象是双曲线。在一次函数与反比例函数结合的压轴题中，数形转化的作用同样显著。例如，求两个函数图象交点的坐标，或根据函数图象的位置关系确定参数的取值范围。通过在同一坐标系中画出两个函数的图象，观察它们的交点情况、走势以及相对位置，能快速判断出满足条件的参数范围，避免了复杂的代数运算。以判断一次函数 y=k1x+b1 与反比例函数 y=xk2（k1 =0，k2 =0）图象交点个数为例，若从代数角度，需联立两个函数的解析式得到方程 k1x+b1=xk2，整理为一元二次方程 k1x2+b1x−k2=0，再根据判别式 Δ=b12+4k1k2 的值来判断交点个数：当 Δ>0 时，有两个交点；当 Δ=0 时，有一个

ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

交点；当 Δ<0 时，无交点。而运用数形转化，直接观察两个函数图象，根据一次函数直线的斜率和截距以及反比例函数双曲线的位置和形状，能更直观地判断交点个数。例如，当一次函数直线与反比例函数双曲线的两支都相交时，有两个交点；当直线与双曲线的一支相切时，有一个交点；当直线与双曲线无交点时，则没有交点。这种数形结合的方法，不仅提高了解题效率，还能让学生更深入地理解函数的本质和图象的特征。

2 几何类压轴题中的数形转化

几何类压轴题注重考查学生的空间想象能力、逻辑推理能力和图形变换能力。几何图形通过形状、大小和位置关系来描述客观世界，而数量关系则是对几何图形的量化表达。在解决几何问题时，数形转化能将几何图形的性质转化为数量关系，通过代数方法进行求解，或将数量关系转化为几何图形，利用图形的直观性解决问题。

2.1 几何证明题中的数形转化

在证明几何命题时，数形转化能帮助解题者找到证明的突破口。例如，在证明线段相等、角相等或图形的全等、相似时，若直接从几何角度寻找证明方法较为困难，可尝试将几何问题转化为代数问题。通过设未知数，利用勾股定理（在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方，即 a2+b2=c2）、相似三角形的性质（相似三角形对应边成比例，对应角相等）等建立方程，进而证明几何关系。反之，对于一些代数问题，若能构造出相应的几何图形，利用图形的性质进行求解，往往能使问题变得简单明了。以证明等腰三角形底边上的高、底边上的中线、顶角平分线相互重合（三线合一）为例，若从几何角度证明，可通过全等三角形来证明。过顶点作底边的垂线，利用“角边角”定理证明两个直角三角形全等，从而得出底边上的高也是底边上的中线和顶角平分线。而运用数形转化，设等腰三角形的腰长为 a，底边长为 b，底边上的高为 h，根据勾股定理可列出方程 h2+(2b)2=a2。通过这个数量关系，结合等腰三角形的对称性，也能从代数角度理解三线合一的性质。同时，在解决一些几何证明题中关于角度关系的问题时，若能将角度转化为三角函数值，利用三角函数的性质进行证明，也是一种有效的数形转化方法。

2.2 圆的压轴题中的数形转化

圆的压轴题常涉及圆与直线、圆与三角形的位置关系。在解决这类问题时，数形转化能发挥重要作用。例如，已知圆的半径 r 和圆心到直线的距离 d，求直线与圆的位置关系，可通过比较距离 d 与半径 r 的大小来判断，这是典型的数形结合。当 d>r 时，直线与圆相离；当 d=r 时，直线与圆相切；当 d<r 时，直线与圆相交。又如，在圆中求弦长、弧长或扇形面积等问题，若能结合图形，利用垂径定理（垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧）、圆周角定理（一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半）等几何性质，将问题转化为直角三角形中的边角关系，再运用三角函数或勾股定理进行计算，就能大大简化解题过程。例如，已知圆的半径为 r，圆心角为 α（弧度制），求弧长 l 和扇形面积 S。根据弧长公式 l=rα 和扇形面积公式 S=21lr=21r2α，结合图形中圆心角与弧、半径的关系，能更直观地理解和运用这些公式。若已知弦长和圆的半径，求弦所对的圆心角，可先通过垂径定理将弦长的一半、圆的半径和圆心角的一半构成直角三角形，再利用三角函数求出圆心角的一半，进而得到圆心角。

3 代数与几何综合类压轴题中的数形转化

代数与几何综合类压轴题是中考数学中最具挑战性的题型之一，它要求解题者具备扎实的代数基础和较强的几何直观能力，能将代数知识与几何图形有机结合起来。在这类问题中，数形转化是连接代数与几何的桥梁，是实现问题转化的关键。

3.1 动点问题中的数形转化

动点问题是代数与几何综合类压轴题的常见类型，点在几何图形上运动，引起相关线段长度、角度大小或图形面积等数量的变化。解题时，可通过建立平面直角坐标系，将动点的位置用坐标表示，将线段长度、图形面积等数量关系转化为函数关系，进而利用函数的性质来研究动点的运动规律。反之，也可根据函数关系绘制出动点的运动轨迹，结合几何图形的性质进行分析。例如，在平面直角坐标系中，有一个边长为 4 的正方形 ABCD，点 A 在原点 (0,0)，点 B 在 x 轴正半轴上，点 D 在 y 轴正半轴上。动点 P 从点 A 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 A→B→C→D→A 的路径运动，设运动时间为 t 秒，求△APD 的面积 S 与时间 t 的函数关系式。通过建立平面直角坐标系，根据点 P 在不同线段上的运动情况，分别确定△APD 的底和高，进而得到面积 S 与时间 t 的分段函数关系式。当 0≤t≤4 时，点 P

在 AB 上，AP=t，AD=4，则 S=21×AP×AD=2t；当 4<t ≤ 8 时，点 P 在 BC 上，BP=t-4，AD=4，此时△ APD 的面积等于正方形面积减去△ ABP 和△ DCP 的面积，经过计算可得 S=16-2(t-4)-2(8-t)=16（此段时间面积不变）；当8<t ≤ 12时，点 P 在 CD 上，CP=t-8，AD=4，则 S=21×AD×CP=2(12-t)；当 12<t ≤ 16 时，点 P 在 DA 上，DP=t-12，AB=4，则 S=21×AB×DP=2(t-12)。通过这种数形转化的方法，能清晰地分析动点在不同位置时△ APD 面积的变化情况。

3.2 存在性问题中的数形转化

存在性问题也是代数与几何综合类压轴题的常见题型，判断是否存在满足特定条件的点或图形。这类问题通常需要先假设存在，然后通过数形转化，将问题转化为方程有解或函数图象有交点等问题，再利用代数方法进行求解。若方程有解或函数图象有交点，则说明存在满足条件的点或图形；反之，则不存在。例如，在平面直角坐标系中，已知点 A(2,0)，点 B(0,4)，在 x 轴上是否存在点 P，使△ PAB 为等腰三角形。先假设存在点 P，设 P(x,0)，然后分三种情况讨论：当 PA=PB 时，根据两点间距离公式 (x2-x1)2+(y2-y1)2，可得 (x-2)2+(0-0)2=(x-0)2+(0-4)2，解方程可得 x=-3；当 PA=AB 时，(x-2)2+(0-0)2=(2-0)2+(0-4)2，解方程可得 x=2±25；当 PB=AB 时，(x-0)2+(0-4)2=(2-0)2+(0-4)2，解方程可得 x=±2（x=2 与点 A 重合舍去）。通过将几何问题转化为方程求解问题，利用数形结合的方法确定了满足条件的点 P 的坐标。

4 数形转化在解题思维培养中的作用

数形转化不仅是一种解题方法，更是一种重要的数学思维。在中考压轴题的解题过程中，运用数形转化能培养学生的多种思维能力。

4.1 直观想象能力的培养

数形转化有助于培养学生的直观想象能力。通过将抽象的数学问题转化为直观的图形，学生能更清晰地看到问题的本质和各个元素之间的关系，从而在头脑中形成清晰的图像，为解决问题奠定基础。例如，在解决空间几何问题时，通过绘制立体图形或展开图，能帮助学生更好地理解空间结构，提高空间想象力。在解决三视图问题时，学生需要根据立体图形的形状和位置，想象出从不同方向观察到的平面图形，或者根据三视图还原立体图形，这一过程充分锻炼了学生的直观想象能力。

4.2 逻辑推理能力的培养

数形转化能锻炼学生的逻辑推理能力。在数形转化的过程中，学生需要根据已知条件进行合理的分析和推理，将图形信息转化为数量关系，或将数量关系转化为图形特征，这一过程需要严谨的逻辑推理。例如，在证明几何命题时，学生需要通过观察图形，找出已知条件和结论之间的内在联系，运用逻辑推理的方法逐步推导，从而得出正确的结论。在从图形中获取数量关系时，学生需要分析图形的构成和性质，确定各个元素之间的数量联系，这也需要逻辑推理的支持。

4.3 创新思维的培养

数形转化还能激发学生的创新思维。在面对复杂的压轴题时，传统的解题方法可能难以奏效，此时运用数形转化，从不同的角度思考问题，将问题转化为其他形式进行求解，往往能开辟新的解题途径，培养学生的创新意识和创新能力。例如，在一些几何问题中，通过构造特殊的图形或引入辅助线，将问题转化为熟悉的问题进行求解；在一些代数问题中，通过建立几何模型，利用图形的性质解决问题。这些方法都体现了创新思维在数形转化中的应用。

5 结论

“数”与“形”的转化在中考压轴题中具有不可替代的作用。它通过将抽象的数学问题直观化、复杂的数学问题简单化，为解题者提供了有效的解题思路和方法。在函数类压轴题中，数形转化能帮助学生理解函数的性质和图象特征；在几何类压轴题中，它能沟通几何图形与数量关系之间的联系；在代数与几何综合类压轴题中，它是连接代数与几何的桥梁。同时，数形转化还能培养学生的直观想象能力、逻辑推理能力和创新思维，对学生的数学学习和综合素质提升具有重要意义。在今后的中考数学备考中，教师应注重引导学生掌握数形转化的方法，培养学生运用数形结合思维解题的习惯。教师可以通过课堂讲解、例题分析、专项训练等方式，让学生熟悉数形转化的各种类型和应用场景，提高学生的解题能力。学生也应积极实践，在解题过程中不断体会数形转化的魅力，主动运用数形结合的方法解决问题，提高自己的数学素养。相信随着对数形转化研究的不断深入，它在中考数学压轴题解题中的应用将更加广泛和有效，为学生的数学学习带来更多的帮助。

参考文献：

[1] 王茯 . 高中数学数形结合解题技巧 [J]. 数学学习与研究 ,2021,(04):152-153.

[2] 陈洁 . 数形结合在小学数学教学中的解题技巧 [J]. 数学大世界 : 下旬 ,2020,(07):78-78.

[3] 朱丽强 . 高中数学解题技巧之 " 数 "" 形 " 结合策略 [J]. 数学大世界：中旬 ,2020,0(02):18-18.

[4] 王晨晨 . 高中数学解题技巧之“数形结合”策略研究 [J]. 高中数理化 ,2021,(24):13-13.

[5] 王立仁 . 借助数形结合思想破解中考题——中考数学压轴题解题技巧分析 [J]. 现代中学生 (初中版),2022,(22):29-30.