ISSN:2705-0408(P); 2705-0416(O)

基于数学运算素养的解析几何教学研究

陈振涌

清远市第一中学　广东清远　511500

摘　要：新课程标准提出的数学运算素养是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。数学运算素养对于解析几何问题解决尤为重要。本文首先阐述了新课标、新高考的大背景，随后，从共性与个性两个角度，对 2022-2023 年高考试题解析几何部分进行分析，对具有共性的试题进行归类与分析，对具有个性的试题进行甄选与讨论，帮助学生形成思维体系，为一线教师提供教学参考思路。

关键词：数学运算素养；解析几何；教学研究

1 绪论

《普通高中数学课程标准（2017 版）》提出了数学学科核心素养，包含了数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析共六大核心素养，它们相互独立，且相互交融。数学运算素养是六大核心素养的重要组成部分，其主要表现是理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。数学学科核心素养集中体现了数学课程目标，是情感、态度以及价值观的综合体现，是在教师、学生以及教育研究者的学习和应用中逐渐形成和发展的。学生能够通过数学运算素养的培养促进思维发展，养成规范化思考问题的习惯，培育出一丝不苟、严谨求实的研究精神。

高考是为了选拔综合性和创新性人才，而解析几何试题正是对学生逻辑推理和数学运算的考查。解析几何是高考试题的必考部分，占据较大的分值，并且难度较大，是教师的教与学生的学的重点和难点，是颇具有区分度的试题。对于高考解析几何试题数学运算素养的分析研究以及对于解析几何数学运算素养的测评体系的构建，能够帮助学生形成解析几何理论与解题的框架，理解数学运算素养对于解析几何问题解决的重要性，把握数学运算素养何时用、怎么用的本质，提升解析几何的学习信心和解题信心。

2 理论基础

2.1 数学学科核心素养之数学运算理论

数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是高中数学教师进行教育教学的基石，任何与核心素养背道而驰的教学都是需要矫正的。而在六大核心素养中，数学运算是处于高中阶段的学生学习的重点与难点，需要高中数学教师们重点关注。数学运算作为解决数学问题的基本手段，是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。学生通过高中数学课程的学习能够提高数学运算能力，借助有效的运算方法解决数学问题。

2.2 波利亚的解题理论

波利亚在数学解题和数学教学方面有着深入研究，他的著作《怎样解题》中的“怎样解题表”是研究的精华所在。此表将问题的解决过程划分成四个基本步骤：第一步，必须理解题目；第二步，找出已知量与未知量之间的联系，最终得到一个解题方案；第三步，执行方案；第四步，检查已经得到的解答。波利亚在“怎样解题表”中概括了人类解决数学问题的一般方法和解决问题的探索启发式程序，其中包含了转化、划归等关键的数学思想。高中数学教师可以以此来制定问题解决的教育教学计划并在课堂上使用。

2.3 建构主义的数学教学理论

建构主义认为，学习指的是学习者在一定社会和文化的环境中，在有一定知识经验的基础上，主动将新知识进行加工处理，融入自己已有的知识框架，对自己的知识框架不断完善的过程。在学习过程中，建构主义强调学习者的主动性，学习者要主动对外界的知识进行加工，而不是被动地接受已成型的知识框架。所以，数学教师在教育教学过程中，应当不断引导学生将新知识和旧知识取得联系，构建属于自己的知识框架。

3 高考试题中关于数学运算素养与解析几何试题的考察研究

3.1 抓住三角特征，探究运算思路

三角函数于其本身是高中数学的重要知识点，同时也是高考试题问题解决中的重要工具与媒介，广泛应用于函数与导数、立体几何，尤其是解析几何等知识点中。2022 年的全国甲、乙卷和新高考Ⅰ、Ⅱ卷中，有两份试卷的解析结合大题都结合了三角函数，可见其重要性。以 22 年高考理数甲卷 20 题，即文数甲卷 21 题为例，本题通过常规的解题思路——设点、联立，得到 M N A B 四点纵坐标之间的关系，为之后的运算做好铺垫。要求当 α－β 取最大值时的 α，β，就要借助函数 f(x)=tan 在特定区间内单调递增这一特性，将求 α－β 最大值的过程，转化为求 tan(α－β) 最大值的过程。在求得 tanα 与 tanβ 之后，借助两角差的正切公式以及基本不等式，求得取最大值时的取等条件，从而推出直线 AB 的斜率。接下来再次通过联立直线与抛物线，求得完整的直线 AB 的方程。整个解题过程需要有对三角函数足够的敏锐度，需要有对三角公式足够的熟练度，更需要有对三角运算的自信以及相匹配的能力，充分体现了解析结合问题解决中的数学运算素养。

3.2 引入向量对象，设计运算途径

平面向量是高中数学的重要知识点。在高考试题的选择填空部分，平面向量往往与解析几何问题解决相挂钩；在解析几何大题中，也经常出现在题设中或者作为解题工具，可见其重要性。以 2023 年高考数学新课标Ⅰ卷第 16 题为例，本题考查了双曲线与平面向量的基本概念，以及学生的运算求解能力与逻辑思维能力。本题在设点后，利用题设有关平面向量的条件 $3\overrightarrow{F_2A}+2\overrightarrow{F_2B}=\mathbf{0}$，得到 A 点横纵坐标与 B 点纵坐标以及焦半径的关系；再借助题设中另一个与向量有关的条件 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，通过与平面向量相关的计算得到 B 点纵坐标与焦半径的关系；最后，考虑到 A 点在双曲线上，利用双曲线的概念求出双曲线的离心率。整个解题过程需要充分利用题设的每一个条件，利用双曲线与平面向量的基本概念将题设条件进行转化，以得到想要的结果，充分考查了学生在解析结合问题解决中的数学运算素养，具有很好的区分度。

3.3 联想一题多解，选择运算方法

高考解析几何试题往往有多种解题方法，在考场中，学生会选择自己最熟练的方法来解题。但是，“一招鲜，吃遍天”的方法还是很少的，解析几何试题很灵活，这就需要学生掌握多种方法和技能，以增加在考场中正确解题的可能。我们以 2023 年高考数学新课标Ⅱ卷第 21 题为例。

方法一以直线 MA1，MA2 斜率为参数，通过联立直线与双曲线，利用直线 MA1，MA2 斜率表示 M,N 两点的坐标。再借助 M,N，(–4,0) 三点共线，得到两斜率之间的又一关系式。最后，通过观察该式与两直线方程之间的特点与关系，得出结论点 P 在定直线 X=–1 上。

方法二以直线 MN 斜率为参数，分直线 MN 斜率存在和不存在两种情况进行讨论。当直线 MN 斜率存在时，通过常规的联立直线与双曲线的方法，借助韦达定理得到两交点横坐标之间的关系。在表示出直线 MA1 的方程与直线 MA2 的方程并联立后，得到用 M，N 点横纵坐标表示的交点的横坐标。此时，我们可以通过画图等方法来猜想这一横坐标恒等于 –1，我们将分子分母相加，通过计算得到分子分母相加等于零，验证了猜想。当直线斜率不存在时，直接通过计算得到 P 点坐标，也符合 P 点在定直线 X=–1 上这一结论。

方法三的思路较为简单，但是计算量是最大的。直接设出点 P 的坐标，用点 P 的横纵坐标表示出直线 MA1 和直线 MA2 的方程。通过联立直线与双曲线，得到 M,N 点的坐标，再借助 M，N，(–4,0) 三点共线，得到 P 点横纵坐标之间的关系式。化简并观察该式，得出结论点 P 在定直线 X=–1 上。

本题可以从不同角度理解直线 MN，若把 M，N 看成直线 MA1，直线 MA2 与双曲线的另一个交点，那就是方法一；若把 M，N 看成直线 MN 和双曲线的两个交点，那就是方法二；若把 M，N 看成直线 PA1，直线 PA2 和双曲线的另一个交点，那就是方法三。在三种不同的解题方法中，选择确定直线 MN 方程的初始参变量不同，导致了解题过程中运算量大小不同。方法一思路并不算常规，计算量不大；方法二思路常规，计算量不大，但是需要一定技巧；方法三思路最简单，但计算量最大。在考场上，不同特点的学生会使用符合自己特点，且能够发挥出自己优势的方法。但是在平时的学习中，用一题多解的眼光去学习欣赏不同的方法，有助于提升解析几何问题解决时的数学运算素养。

4 构建解析几何与数学运算素养解题测评体系

4.1 合理猜想，强化命题

在部分试题的解题中，直接证明某一命题并不容易，但如果经过合理的猜想，强化待证明的命题，证明的过程会更加容易，证明的思路会更加清晰，证明中的运算也会更为简洁。以 22 年高考理数乙卷 20 题，即文数乙卷 21 题为例，在第二小题的解题过程中，如果直接证明直线过定点的话计算量十分大，甚至需要多设两个未知数。但如果先通过讨论过点 P 的直线斜率不存在的情况，得到直线 HN 的方程，由于直线 HN 斜率带有根号较为复杂，我们很自然的就能猜测到这一定点就是该直线上数字不复杂的点，也就是与 y 轴的交点（0,–2）。这样我们就通过猜测，把待证明的命题“直线 HN 过定点”强化为了“直线 HN 过定点（0,–2）”，极大的方便的后续的证明与计算，为完成此题的证明打下了坚实的基础。在过点的直线斜率存在的情况下，在算出直线 HN 的方程后，我们直接将（0,–2）点代入直线 HN 的方程，会发现该方程恒成立，也就证明了直线 HN 过（0,–2）定点。本题考察了椭圆的标准方程，直线与直线的交点坐标的求法，直线与椭圆的位置关系等知识点，在问题解决时合理的猜想是对运算以及数字敏锐的嗅觉的体现，也是数学运算核心素养的体现。 4.2 巧用结论，解中点弦

中点弦问题是考察解析几何知识点的试题中十分常见的一类题型，在高考试题中也经常出现，学生在知晓中点弦的相关结论的前提下，能够更为快速顺利且清晰地完成问题解决。相反，如果学生不知道中点弦的相关结论，盲目地依靠运算表达长度，往往会陷入困境。因此，熟练掌握中点弦的相关结论是十分必要的，即使这些结论并没有在课本中出现，也要进行补充学习和练习。

4.3 最值问题，多种解法

高考试卷的压轴题为了有较好的区分度，选拔出创新性人才，往往考查学生的综合分析能力，难度较大。同时，作为一道解析几何压轴题，试题的计算量较大，在思路确定的情况下，需要通过数学运算达成目标。数学运算方式并不唯一，选择合适的，不易错的，简便且省时的运算方式尤为重要，是数学运算素养的体现，是数学问题解决的重要途径。以 2023 年高考数学新课标 I 卷第 22 题为例，解答此题需要学生一定的动态思维能力，在大致想象滑动的过程中矩形各个要素变化情况的前提下，找到变化中的不变量，考生要不断将问题进行等价转化，抑或把问题化归为已经解决的问题。在该解题思路中，需要考虑给定边长的矩形符合题目条件的充要条件，这一步是重要的等价转化，在此之后的证明思路会较为容易找到方向，也不会使不等式放缩过度。该题的解题过程使用了三角和向量两个重要工具，三角和向量在辅助解决解析几何问题时十分常用，选择合适的工具有助于形成正确的思路，为之后的解题铺平道路。在求（cos）2sin 最值时，有多种方法。第一种方法是用导数求解，知识点基础且思路简单，但计算量偏大；第二种方法是使用均值不等式，既需要扎实地掌握均值不等式，也需要灵活的思路，优点是计算量小；第三种方法是用因式分解，对学生的因式分解能力要求较高，且需要提前的猜测或根据最终结论推测最值，难度较大。多种方法快速解最值问题是解析几何问题解决中数学运算素养的重要体现。

5 总结

本文首先概括了《普通高中数学课程标准（2017 版）》数学学科核心素养的提出以及高考解析几何试题对数学运算素养的要求这两个重要的研究背景，再阐述了数学学科核心素养之数学运算理论、波利亚的解题理论以及建构主义的数学教学理论这三个重要的理论，为本文的研究奠定基础。接着从三个角度，紧扣解析几何问题解决中的数学运算素养进行试题及教学的研究。

从共性与个性两个角度分析 2022–2023 年高考解析几何试题。找寻其共性，研究三角函数和平面向量与解析几何的命题结合；探究其个性，对于强化命题、参数替换、中点弦与焦半径的重要结论进行个例分析。在此分析过程中，对于一题多解的试题也有深刻地讨论。对于二者的分析能够帮助学生形成思维体系，为一线教师提供教学参考思路。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部 . 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[M]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 叶良铨 . 数学运算素养提升的培养策略探究 [J]. 考试周刊 ,2023,(33):69–74.

[3] 庞翠 . 浅析高中数学运算素养的培养措施 [J]. 数学教

学通讯 (高中版),2023,(5).

[4] 李瑛，沈婕，刘勇，王洪亮，谭毅 . 数学运算素养的水平划分与评价 [J]. 考试研究 ,2023,(2):1-12.

[5] 罗彦东，金莹，裴照雪 . 基于新高考的解析几何命题特点及教学策略研究 [J]. 学周刊 ,2023,(2):18-20.

[6] 许秀亮 . 看形找数 以数解形 ——谈平面解析几何试题解题策略 [J]. 数学通报 ,2021, 第 60 卷 (3):49-53，58.

[7] 张晨曦 . 高中数学解析几何中数形结合思想生成研究 [J]. 考试周刊 ,2022,(18):74-77.