

初中平面直角坐标系跨单元教学设计与实施的研究

——基于“珍宝藏在哪里”案例

王 婷

上海市静安区风华初级中学西校, 上海 200072

摘 要: 本研究以沪教版七年级“平面直角坐标系”教学内容为载体, 设计并实施了以“珍宝藏在哪里”为主题的三课时跨单元教学案例。通过“基础回顾—探究应用—拓展升华”的教学模式, 整合“图形的性质”、“图形的变化”和“图形与坐标”三个知识单元, 采用问题驱动教学法, 引导学生从特殊到一般进行数学探究。研究结果显示, 跨单元教学能有效促进学生数学核心素养的发展, 学生在问题解决中展现出从直观感知到抽象推理的思维进阶, 实现了知识的深度理解和能力的全面提升。

关键词: 平面直角坐标系; 跨单元教学; 问题驱动; 思维发展; 核心素养

1 引言

随着《义务教育数学课程标准(2022年版)》的颁布实施, 数学核心素养的培养成为初中数学教学的重要目标。平面直角坐标系作为连接代数与几何的重要纽带, 其教学价值不仅在于知识本身, 更在于其所承载的数形结合思想和方法论意义^{[1][2][3]}。然而, 当前数学教学中普遍存在知识碎片化现象, 学生难以建立知识间的内在联系, 制约了数学核心素养的形成。

2 研究设计与方法

2.1 研究对象

本研究选取上海市风华初级中学七年级和九年级学生进行对比研究。

2.2 研究方法

采用行动研究法, 通过教学设计、课堂观察、作品分析、访谈等多种方法收集数据。运用质性分析与量化分析相结合的方式, 全面评估教学效果。

2.3 教学设计框架

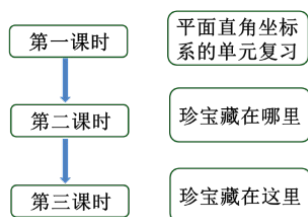


图1 跨单元教学设计框架

本研究构建了以问题驱动为核心的跨单元教学设计框架

(如图1所示), 该框架包含三个层次:

- (1) 基础层: 平面直角坐标系的基本概念和性质
- (2) 联结层: 图形运动与坐标变化的关系
- (3) 拓展层: 数学思想方法的迁移应用

3 教学实施过程

3.1 第一阶段

教学目标

- (1) 掌握平面直角坐标系的基本概念
- (2) 理解点与坐标的一一对应关系

教学实施 通过思维导图引导学生构建知识体系, 重点围绕“形数互化”设计问题链:

- (1) 如何用数学语言精确描述点的位置?
- (2) 平面上的点与有序数对能够建立一一对应?
- (3) 如何根据实际问题建立合适的坐标系?

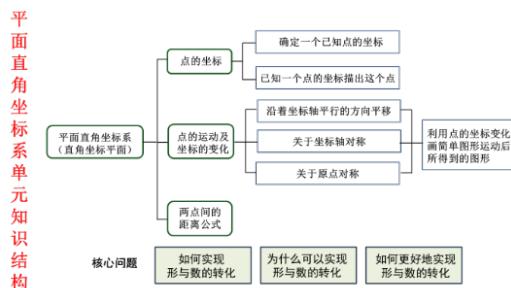


图2 平面直角坐标系单元知识结构图

3.2 第二阶段：探究应用

教学目标

- (1) 在真实情境中灵活应用坐标系解决问题
- (2) 发展空间想象和逻辑推理能力

教学实施

创设“寻宝”情境，给定约束条件： $A(7, 2)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $E(13, 4)$ 。组织学生分组探究，重点观察学生的问题解决策略和思维过程。

一个寻宝者，从散传的资料中看到，在一个海岛上有一个隐秘的地点，里面藏着许多珍宝。资料中对藏宝地点的描述是这样的：这个海岛上有两块天然巨石，海岛的地图上分别用点 A 、 B 表示；在一个平面直角坐标系中，这两点的坐标是 $A(7, 2)$ 、 $B(1, 2)$ ，藏宝地点 E 的坐标是 $(3, 4)$ 。

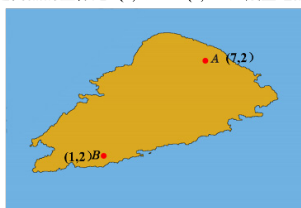


图3 海岛上地图参考点 A、B 的坐标标注及位置

关键发现：

76.4% 的学生能够发现 $AB \parallel x$ 轴的关键信息

学生提出多种不同的坐标系建立方法

各小组展现出显著的思维差异和创新性

图形的运动单元知识结构

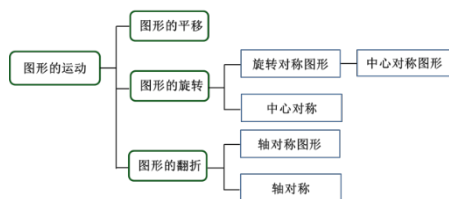


图4 图形运动的单元知识结构图

在坐标系不确定的情况下，给了 A 、 B 两点坐标及位置，以及点 E 的坐标，能否确定点 E 的位置。学生在寻找点 E 位置时最关键的是学生发现 A 、 B 两点的纵坐标相同，直线 AB 是平行于 x 轴的，所以找到了关于 x 轴的方向，所以会发现解决问题时比较简单。

3.3 第三阶段：思维深化

教学目标

- (1) 在复杂情境中深化对坐标系的深入理解
- (2) 经历从具体到抽象的数学化过程
- (3) 体会数学思想方法的发展演进

教学实施

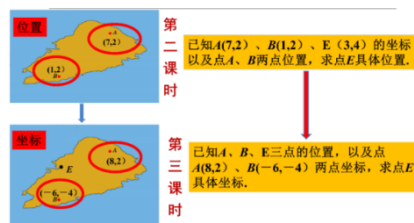


图5 两课时坐标变化对比图

如果改变 AB 两点坐标， A 、 B 两点坐标改为 $A(8, 2)$ 、 $B(-6, -4)$ ，那么此时我们发现 A 、 B 两点已经不与 x 轴平行了，把这个作为思考题，也是我们第三课时主要需要解决的问题。因为不平行了，我们在上课的过程中，有一部分同学是这样想的？

我们分别在七年级学生和九年级学上做了实验，结果如下：在七年级学生理解中，平面直角坐标系中横轴纵轴应该是水平向右和竖直向上两个方向，所以他们建立了这样的一个坐标系，把 BC 等分成14份， AC 等分成6份，通过平移去找到点 E 的大致位置，此时平面直角坐标系横纵坐标的单位长度时不相同的。

七年级学生作品1：

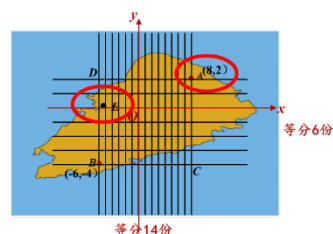


图6 七年级学生1建立的坐标系 ($A(8, 2)$ $B(-6, -4)$)

这个学生不仅横纵坐标单位长度不统一，而且最主要的是方向没有正确，没有进行合理的建系；显然，在这个问题中，横轴纵轴表示的都是数字，且数值相差不大，从合理建系的角度来讲，我们应该在方向确定的前提下，确保横纵坐标的单位长度保持一致。所以，这种方法是错误的。

七年级学生作品1：

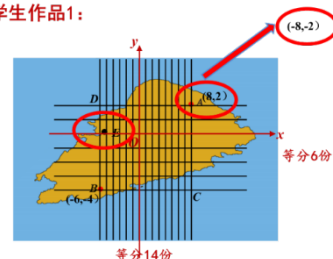


图7 A坐标修改成 $A(-8, -2)$ 时建立的坐标系的局限性

当然了，我们在现实生活中，有的时候是会根据实

际问题的背景，去建立横坐标与纵坐标不相等的平面直角坐标系，比如说时间速度坐标系，时间路程坐标系等根据实际问题建立坐标系，那么横纵坐标单位长度可以是不一样的。当我们把 $A(8,2)$ 改成 $A(-8,-2)$ 以后，我们更能体会出这种方法的弊端。

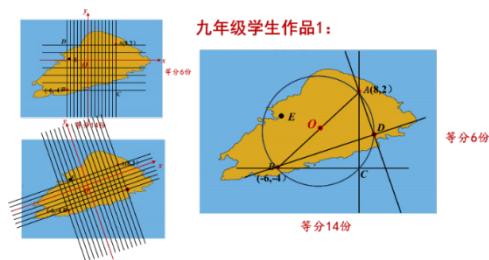


图 8 九年级学生作品 1：坐标系建立方法

那应该怎样去做呢？同样的这个问题，我们也在九年级进行探究，让九年级学生去设计了一下，九年学生会怎样去想的？我们得到了这样的答案：九年级学生是这样认为的：要合理建立平面直角坐标系，关键是要找到两条坐标轴，建立一个直角三角形，而这个直角三角形的直角顶点 C 的轨迹其实是一个以 AB 中点为圆心， $\frac{1}{2} AB$ 长为半径的圆，所以，我们只要在圆上任意一点去建立这样一个平面直角坐标系就完成了，而本题因为知道 A 、 B 两点坐标，所以其实就是这两条直角边被分割成了 14 份和 6 份，而他们的单位长度保持一致，换句话说，其实我们就是在圆上找一个点 D ，使得 $\frac{AD}{BD} = \frac{6}{14}$ ，所以学生想到只要满足这个 $\tan \angle B = \frac{6}{14}$ 即可，这样就可以合理建立平面直角坐标系了，利用直径所对的圆周角是直角，圆的相关知识将平面直角坐标合理建系，从而解决问题。

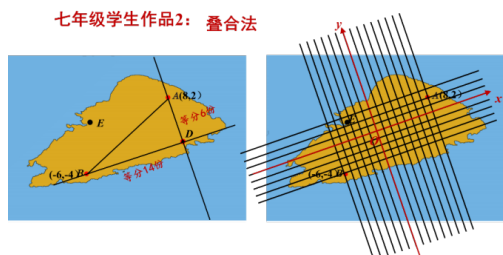


图 9 七年级学生作品 2：叠合法建立坐标系

接下来，七年级学生带来想法：首先，他在透明的草稿纸上建立平面直角坐标系，横纵单位长度保持一致，描出点 $A_1(8,2)$ 和 $B_1(-6,-4)$ ，在地图上联结 AB ，将透

明的平面直角坐标系中的 A_1B_1 和地图上的 AB 重合，此时，过地图上的 A 点做透明纸片上 Y 轴的平行线，过地图上的 B 点做透明纸片上的 X 轴的平行线，这两条平行线的交点就是合理建系中的点 D ，然后等分 AD 为 6 份，等分 BD 为 14 份，通过平移，找到原点， X 轴， Y 轴，从而确定点 E 的坐标。

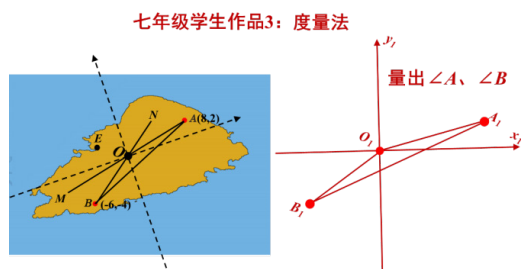


图 10 七年级学生作品 3：度量法建立坐标系

学生其实远比我们想象的更加聪明，思维更加的发散，他们能想到一些我们都想不到的方法，他们这样想的，单位有长度和方向，那我能不能更快的去得到这个坐标原点，我们知道 A 、 B 、 E 三点的坐标以及 A 、 B 两点的位置，去找点 E 的位置，那么它是通过度量 $\angle A$ 、 $\angle B$ 去地图上画 $\angle A$ 、 $\angle B$ 相等，然后根据线段长 AB ，通过 ASA 全等从而得到点 E 的位置，但在我们这个问题中点 E 的位置知道，坐标不知道如何通过这个方法去解决问题呢？学生想到既然点 E 的坐标不知道，那我可以利用点坐标原点的坐标，通过画 $\triangle ABO$ 全等来解决问题；

首先量出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 画出 $\triangle ABO$ ，然后将透明纸上的 A_1B_1 与地图上的 AB 平行，然后过地图上的 O 点做透明纸片上 X 轴、 Y 轴的平行线，从而合理建立平面直角坐标系解决问题。这种方法的好处在于能很快的找到坐标原点。

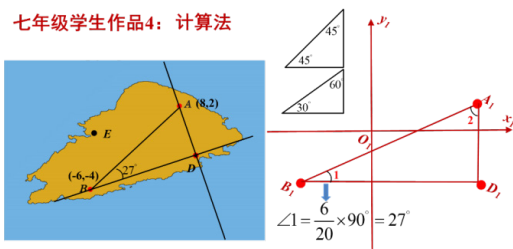


图 11 七年级学生作品 4：计算法建立坐标系

7 年级有个学生是这样想的，他的这种想法让我们更加惊喜：他说无论叠合还是测量都会有点误差，那能不能通过计算得到角度的大小呢？他是这样想的，他说：我们最近学的等腰直角三角形两个底角的 45° ， 45° ，1:1，

那么边长相等也是 1:1, 所以他认为 30° , 60° , 90° 的 RT \triangle , 两条直角边之比为 1:2,

那么, 沿用到这道题目中, 基于他这样的认识, 既 $\frac{AD}{BD} = \frac{6}{14}$, 他认为 $\angle B$ 的度数等于 $\angle 1 = \frac{6}{20} \times 90^\circ = 27^\circ$; 然后过点 A 做垂直即可得到点 D. 这种做法对吗? 显然是不对的, 但是当他学习了九年级的锐角三角比, 知道了 $\angle B = \arctan \frac{6}{14}$, 那么我们也能得到这个角的度数, 虽然他不知道, 但是他的这个思想是非常好的. 这也体现了跨单元学习的意义所在.

前面都是七年级学生的想法, 因为没有后续知识的补充, 七年级学生很难精确求得这个点 E 的精确坐标, 但在九年级问题设计中, 我们要求学生精确求出点 E 的坐标, 那么, 九年级学生, 他们又会怎么样去完成呢?

九年级学生作品2: 成比例线段法

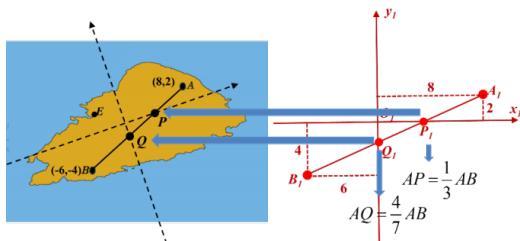


图 12 九年级学生作品 2: 成比例线段法建立坐标系

在透明纸上建立平面直角坐标系, 标出 A_1B_1 两点, 联结 AB 发现, AB 与 x 轴交于点 P_1 , AB 与 y 轴交于点 Q_1 , 根据九年级知识成比例线段知识, 可以得到 $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AQ}{AB} = \frac{4}{7}$, 所以根据这一比例关系, 在地图上联结 AB, 找到 P 点和 Q 点, 然后使得 $A_1B_1 \parallel AB$, 然后过点 P 作 X 轴的平行线, 过点 Q 作 Y 轴的平行线, 从而就合理建立好了平面直角坐标系.

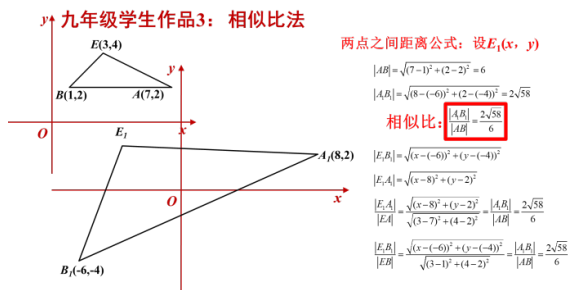


图 13 九年级学生作品 3: 相似比法建立坐标系

如果说前面的方法都是通过平面直角坐标系的合理建系来解决问题, 求出点 E 的大概坐标的话, 九年级学生有这样一些想法, 通过相似来解决问题, 利用两点之间的距离公式求出线段 AB、 A_1B_1 的长, 求出相似比 $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}$, 设出点 E 的坐标, 然后通过相似比列出方程, 求出点 E 的坐标.

九年级学生作品4: 三等分点法

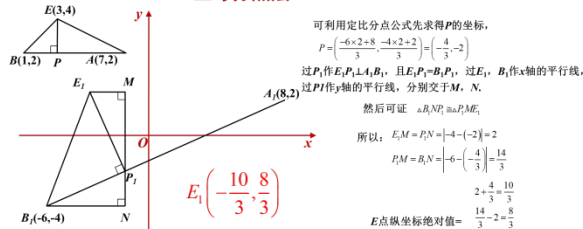


图 14 九年级学生作品 4: 三等分点法建立坐标系

这个学生敏锐的观察到, 原来三角形 ABC 中, $\angle B$ 的夹角是 45° , 所以过点 E 作 $EP \perp AB$, $\triangle AEP$ 为等腰直角三角形, 此时点 P 为 AB 的三等分点, 因为形状不变, 所以 $B_1E_1P_1$ 也为等腰直角三角形, 点 P_1 也为 A_1B_1 的三等分点. 这个方法虽然有点超出初中阶段学生的认知, 但是学生能想到还是很惊喜的. 运用这种方法求解时, 任意变化 AB 的坐标都能方便的求出点 E 的坐标. 这个图形其实就是七年级现在正在学习的一线三垂直模型, 这个模型应该是七年级学生应该掌握的, 虽然用到后面的知识, 其实这样也可以得到. 这位同学抓住了图形的基本特征, 抓住了等腰直角三角形, 利用平面直角坐标系这个工具, 解三角形从而使得问题得以解决.

所以我们如果把 A_1 、 B_1 两点的具体坐标改变字母 $A_1(a, b)$ 、 $B_1(c, d)$, 学生仍然能得到答案吗?

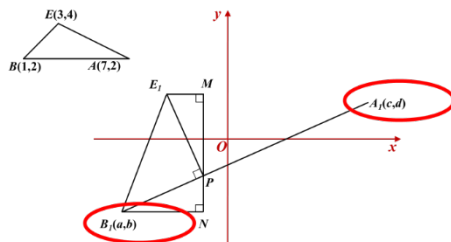


图 15 一般化后的三等分点法求解示意图

因此, 在这几节课的整个探索过程中, 我们借助平面直角坐标系这个工具, 让学生经历了图形的平移、旋转、翻折、以及缩放等运动过程, 让学生体会到跨单元教学的意义和作用. 归根结底, 图形的运动说到底就是点的运动,

我们今天的整个探究过程是为学习做一个铺垫。

图形运动：平移、旋转、翻折、缩放

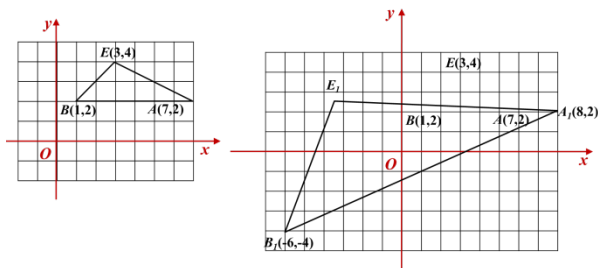


图 16 图形的三大运动示意图

总的来说,平面直角坐标系的跨单元教学设计是什么:应该抓住图形特征,去研究图形的运动,图形归根结底就是点,所以图形的运动就是点的运动,因此我们可以通过平面直角坐标系合理建系,利用平面直角坐标系研究这些点的轨迹,从而研究函数函数的,这个过程也是解三角形,也是高中的解析几何。



图 17 建立平面直角坐标系解决实际问题的流程图

通过这节课我们体会到,就这个问题的解决方法而言,从 7 年级学生到 8、9 年级学生的解决方法,看似是一种方法和技能的改变,其实以前经历了很多前人的探索和研究,才有了这些新的方法,这些方法让人们在解决问题时,在效率和结果的准确率上都有很大的提升,也希望学生们以后也将这种精神传承下去,应用到以后得工作和生活中.这是我们跨单元教学的意义和目的。

4 结论

平面直角坐标系作为初中数学的关键节点,是数轴的拓展,是沟通几何与代数的桥梁,内容核心是平面上的点与用数对表示的坐标的一一对应.要强调数形结合,引导学生经历用坐标表达图形的轴对称、旋转、平移变化的过程,体会用代数方法表达图形变化的意义,发展几何直观;引导学生经历借助平面直角坐标系解决现实问题的过程,感悟数形结合的意义,发展推理能力和运算能力,增强应用

意识和创新意识.其教学设计不仅需深入浅出,更要跨越不同单元,实现知识的融会贯通.本文将探讨初中平面直角坐标系的跨单元教学设计与实施策略.初中阶段图形与几何领域包括“图形的性质”“图形的变化”和“图形与坐标”三个主题.学生将进一步学习点、线、面、角、三角形、多边形和圆等几何图形,从演绎证明、运动变化、量化分析三个方面研究这些图形的基本性质和相互关系.“图形的性质”强调通过实验探究、直观发现、推理论证来研究图形,在用几何直观理解几何基本事实的基础上,从基本事实出发推导图形的几何性质和定理,理解和掌握尺规作图的基本原理和方法;“图形的变化”强调从运动变化的观点来研究图形,理解图形在轴对称、旋转和平移时的变化规律和变化中的不变量;“图形与坐标”强调数形结合,用代数方法研究图形,在平面直角坐标系中用坐标表示图形上点的位置,用坐标法分析和解决实际问题.这样的学习过程,有助于学生在空间观念的基础上进一步建立几何直观,提升抽象能力和推理能力。

本研究通过“珍宝藏在哪里”教学案例的实施与验证,得出以下结论:首先,平面直角坐标系的跨单元教学能够有效打破知识壁垒,促进学生对数学知识的整体理解和深度掌握.其次,问题驱动的教学模式能够激发学生的学习兴趣,促进数学思维的全面发展.最后,跨单元教学为数学核心素养的落地提供了可行的实践路径,对推动初中数学教学改革具有重要的参考价值.未来的数学教学应当更加注重知识的整合与联系,通过精心设计的跨单元教学活动,引导学生在解决真实问题的过程中实现知识的建构与能力的提升,最终达成立德树人的根本目标。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022 年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 刘达.初中数学:立足单元教学,关注育人目标,聚焦数学活动[J].上海课程教学研究,2022,(05):62-64.
- [3] 王新苗.初中教学中激活学生数学创造力的实践探索[J].上海教师,2024,(04):106-114.

作者简介:王婷(1991—),女,汉族,上海市人,硕士,上海市静安区风华初级中学西校,教师,数学。