基本函数的有趣结合

——以探究函数 f(x)=log_a|b+d/(x+c)| 的图像与性质为例

张 晨　晏旭骢　孙靖淇

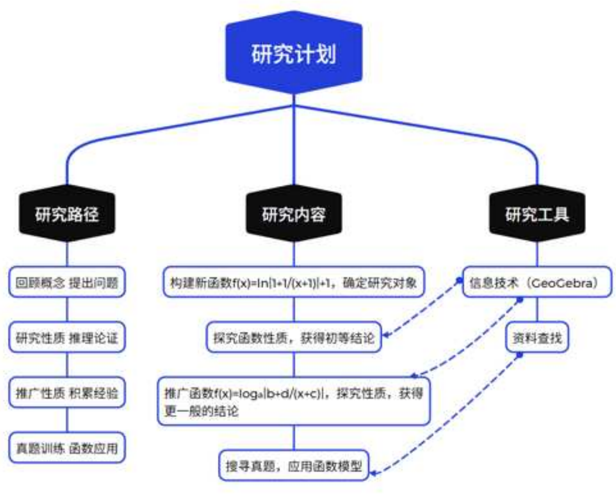
山东省青岛第一中学　山东青岛　266000

摘要：在数学人教版 A 版必修第一册中，我们学习了诸多基本函数：幂函数、指数函数、对数函数等等。那么如果将某些基本函数结合起来，就会组成新的有研究价值的函数（例如 f(x)=ax+b/x）。该研究性学习主要是通过探究学习的形式进行，先自主探究了函数 f(x)=ln|1+1/(x+1)|+1 的图像与性质，并进行形如 f(x)=log_a|b+d/(x+c)| 的推广。在此过程中经历了研究一类新函数的一般思路与方法。特别是，我们得到了该类函数对称性与奇偶性的系列判定定理，并将其成功应用于高考试题的简捷求解。

关键词：基本函数结合；图像与性质；探究学习

目前我们已经完成了基本函数的概念与性质的学习，回顾了初中学习的一次函数、二次函数，发现其可以看成是由基本函数与常数之间经过加、减、乘、除运算构造出来的不同函数 . 因此，我们将对数函数，分式函数经过加减乘除绝对值运算后，得到了一些新函数。并借此函数的出研究陌生函数的一般思路与方法。其意义在于：通过自主学习，能够理解函数的图象与性质，并能够通过计算机技术帮助完成研究；提高了我提出问题、分析问题和解决问题的能力，培养探索精神。

研究计划如下：



1 研究过程

1.1 从简单的函数入手：$f(x)=\ln\left|1+\frac{1}{x+1}\right|+1$

在面对一个陌生函数时，首先想到了先采用描点做图的方法，粗略掌握函数图像观察出大概性质和特征。考虑到函数的定义域我们选取 [–3,3] 这一区间上的几个点来画图。（图 1）

–3	0.3069
–2.01	–3.6151
–1.99	–3.5951
–1.01	5.6151
–0.99	5.6151
0	1.6931
1	1.4055
2	1.2877
3	1.2231

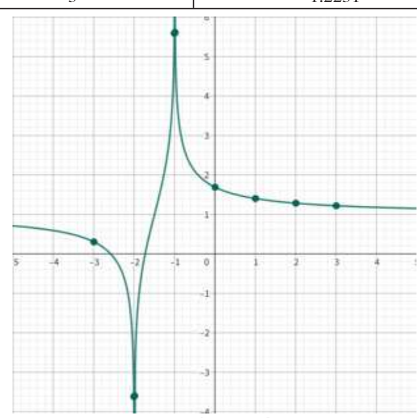


图 1　$f(x)=\ln\left|1+\frac{1}{x+1}\right|+1$的图像

(1) 定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

教育与学习 7 卷 7 期
ISSN:2705-0408(P)；2705-0416(O)

(2) 值域为 $\mathbb{R}$

(3) 奇偶性：函数为非奇非偶函数，但有对称中心：

猜想：设 f(x) 的对称中心为 (a,b)

$\because x \neq -1, x \neq -2$

$\therefore a=\frac{-1+-2}{2}=-1.5$

b=f(a)=f(−1.5)=1

证明：

f(a−x)+f(a+x)=2b

即 $f(-1.5-x)+f(-1.5+x)=\ln\left|\frac{0.5-x}{-0.5-x}\cdot\frac{0.5+x}{-0.5+x}\right|+2$ =ln|1|+2=2=2b ⇒ b=1

$\therefore f(x)=\ln\left|1+\frac{1}{x+1}\right|+1$的对称中心为 (−1.5,1)

(4) 单调性：函数有三条渐近线，分别为直线 x=−1，直线 x=−2 和直线 y=1

函数图像在 (− ∞ ,−2) 单调递减 , 在 (−2,−1) 单调递增 , 在 (−1,+ ∞) 单调递减：

内层函数$u(x)=1+\frac{1}{x+1}$ 在 (− ∞ ,−1) 和 (−1,+ ∞) 单调递增；

中层函数 v(x)=|u| 在 (− ∞ ,−2] 和 (−1,+ ∞) 单调递减 , 在 [−2,−1) 单调递增；

外层函数 w(x)=lnv+1 在 (− ∞ ,−2) 和 (−1,+ ∞) 单调递减 , 在 (−2,−1) 单调递增；

复合函数 w(v(u(x))) 在 (− ∞ ,−2) 和 (−1,+ ∞) 单调递减 , 在 (−2,−1) 单调递增；

综上所述 , 函数在 (− ∞ ,−2) 和 (−1,+ ∞) 单调递减 , 在 (−2,−1) 单调递增。

1.2 推广到一般函数：$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$

(1) 定义域：$\left\{x \mid x \neq -c 且 x \neq \frac{bc+d}{b}\right\}$

(2) 对称性：

①对称中心：

设其对称中心坐标为 (m,n)

$\because$定义域：$\left\{x \mid x \neq -c 且 x \neq \frac{bc+d}{b}\right\}$

$\therefore m=\frac{-\left(c+\frac{bc+d}{b}\right)}{2}=\frac{2bc+d}{-2b}$

$\therefore b=f(m)=f\left(\frac{2bc+d}{-2b}\right)$

证明：

f(m−x)+f(m+x)=2n

$$=\log_a\left|\left(b+\frac{d}{m+x+c}\right)\left(b+\frac{d}{m-x+c}\right)\right|$$

令$\left(b+\frac{d}{m+x+c}\right)\left(b+\frac{d}{m-x+c}\right)=g(x)$

令$m+c=\frac{d}{-2b}=A$

因此$g(x)=\left(b+\frac{d}{A+x}\right)\left(b+\frac{d}{A-x}\right)=b^2+\frac{bd}{A+x}+\frac{bd}{A-x}+\frac{d^2}{(A+x)(A-x)}=b^2+bd\left(\frac{2A}{A^2-x^2}\right)+\frac{d^2}{A^2-x^2}=b^2+\frac{2Abd+d^2}{A^2-x^2}$

要使 g(x) 为一个常数 , 则需消除项

∴ 2Abd+d^2=0

$(x)=b^2$

原式 $=\log_a|g(x)|=\log_a|b^2|=2\log_a|b|=2b$

即 $b=\log_a|b|$

因此$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$的对称中心坐标为$\left(\frac{2bc+d}{-2b},\log_a|b|\right)(b\neq 0)$

定理 1（对称中心）若函数$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$中 b ≠ 0，则函数的对称中心为$\left(\frac{2bc+d}{-2b},\log_a|b|\right)$。

②对称轴：

令$u(x)=b+\frac{d}{x+c}$，设函数图像关于 x=m 对称，则需 f(m+t)=f(m−t)，对于任意实数 t 成立。

代入：$\log_a\left|b+\frac{d}{m+t+c}\right|=\log_a\left|b+\frac{d}{m-t+c}\right|$

因为 $f(x)=\log_a x$ 单调，所以有$\left|b+\frac{d}{m+t+c}\right|=\left|b+\frac{d}{m-t+c}\right|$

设 p=m+c，则$\left|b+\frac{d}{p+t}\right|=\left|b+\frac{d}{p-t}\right|$，对于任意实数 t ≠ ± p

记$A(t)=\left|b+\frac{d}{p+t}\right|$，$B(t)=\left|b+\frac{d}{p-t}\right|$，则绝对值相等有两种可能：A(t)=B(t) 或 A(t)=−B(t)

情况 1：$A(t)=B(t) \Rightarrow \frac{d}{p+t}=\frac{d}{p-t}$

若 d ≠ 0，则有 t=0，所以情况 1 不成立，除非 d=0，但此时的函数是常数函数，任意对称，无意义。

情况 2：$A(t)=-B(t) \Rightarrow b+\frac{d}{p+t}=-b-\frac{d}{p-t}$

经化简得$b+\frac{dp}{p^2-t^2}=0$，因此 dp=0 时，对于任意 t 成立。

・若 d=0，则 $f(x)=\log_a|b|$，为常数函数，不考虑；

・若 p=0，即 m+c=0 ⇒ m=−c，则条件变为 b=0，此时

$f(x)=\log_a\left|\frac{d}{x+c}\right|, m=-c$检验 f(m+t)=f(m−t)，成立。

综上：对称轴为 x=−c(b=0,d ≠ 0)

定理 2（对称轴）若函数$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$中 b=0 且 d ≠ 0，则函数的对称轴为 x=−c。

※ 特别地，函数的奇偶性有以下关系：

Ⅰ若函数为奇函数，可以通过对称中心判断，则有

$$\begin{cases}\frac{2bc+d}{-2b}=0\\ \log_a|b|=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\ d=-2c\end{cases}$$

定理 3（奇函数）函数$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$为奇函数的充要条件$\begin{cases}b=1\\ d=-2c\end{cases}$。

这里以$\begin{cases} a=2 \\ b-1 \\ c=2.5 \\ d=-5 \end{cases}$举例，图像如下（图 2）：

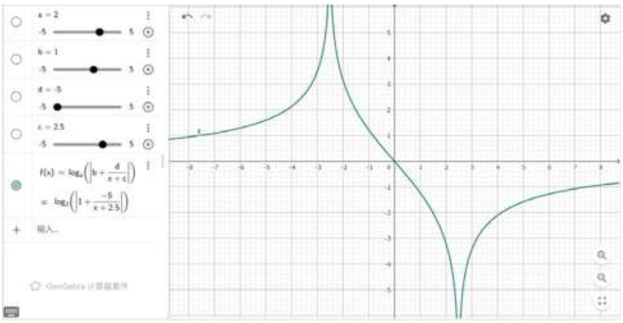


图 2 $f(x)=\log_2\left|1-\frac{5}{x+2.5}\right|$的图像

Ⅱ若函数为偶函数，可以通过对称轴判断，则有 x=-c=0，即有 b=c=0

此时$f(x)=\log_a\left|\frac{d}{x}\right|\ (x\neq -c)$

定理 4（偶函数）函数$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$为偶函数的充要条件为 b=c=0。

这里以$\begin{cases} a=2 \\ d=3 \end{cases}$举例，图像如下（图 3）：

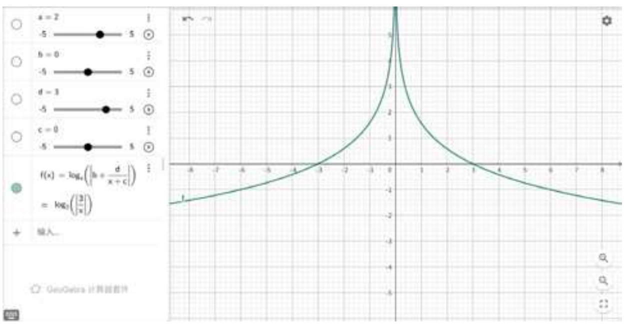


图 3 $f(x)=\log_2\left|\frac{3}{x}\right|$的图像

（3）单调性：（以 a>0 且 a ≠ 1 为例）

定义域为$\left\{x\middle|x\neq -c且x\neq \frac{bc+d}{b}\right\}$

①令$-c<-\frac{bc+d}{b}$

Ⅰ b>0，则 d<0，$g(x)=\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$的图像在$(-\infty,-c),(-\frac{bc+d}{b},+\infty)$上单调递增，在$(-c,-\frac{bc+d}{b})$上单调递减，因此$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$在$(-\infty,-c),(-\frac{bc+d}{b},+\infty)$上单调递增，在$(-c,-\frac{bc+d}{b})$上单调递减；

Ⅱ b<0，则 d>0，$g(x)=\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$的图像在 (- ∞ ,-c) $(-\frac{bc+d}{b},+\infty)$上单调递减，在$(-c,-\frac{bc+d}{b})$上单调递增；

因此$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$在$(-\infty,-c),(-\frac{bc+d}{b},+\infty)$上单调递减，在$(-c,-\frac{bc+d}{b})$上单调递增；

②令$-c>-\frac{bc+d}{b}$

Ⅰ b>0，则 d>0，$g(x)=\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$的图像在$\left(-\infty,-\frac{bc+d}{b}\right),(-c,+\infty)$上单调递减，在$(-\frac{bc+d}{b},-c)$上单调递增，因此$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$在$\left(-\infty,-\frac{bc+d}{b}\right),(-c,+\infty)$上单调递减，在$(-\frac{bc+d}{b},-c)$上单调递增；

Ⅱ b<0，则 d<0，$g(x)=\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$的图像在$\left(-\infty,-\frac{bc+d}{b}\right),(-c,+\infty)$上单调递增，在$(-\frac{bc+d}{b},-c)$上单调递减；因此$f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$在$\left(-\infty,-\frac{bc+d}{b}\right),(-c,+\infty)$上单调递增，在$(-\frac{bc+d}{b},-c)$上单调递减；

③当 b=0 时，$f(x)=\log_a\left|\frac{d}{x+c}\right|$，定义域 x ≠ -c，该函数在 (- ∞ ,-c) 上单调递增，在 (-c,+ ∞) 上单调递减。

当 0<a<1 时，结论刚好与上述结论相反。

2 函数应用

例 1（2022· 全国乙卷（文））已知函数$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$为奇函数，则 a=___，b=___.

分析 1

解法 1：由题可知该函数的定义域为 {x ｜ x ≠ 1}，因为函数为奇函数，所以有 x ≠ -1，即当 x=1 时，真数$\left|a+\frac{1}{1-x}\right|=0$，所以得出$a=-\frac{1}{2}$，此时$f(x)=\ln\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right|+b$。跟聚奇函数性质，得出 f(0)=-ln 2+b=0，解得 b=ln 2。

解法 2：因为函数为奇函数，所以

$$f(x)+f(-x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b+\ln\left|a+\frac{1}{1+x}\right|+b=0$$

$$\ln\left|\left(a+\frac{1}{1-x}\right)\left(a+\frac{1}{1+x}\right)\right|+2b=0$$

$$\ln\left|a^2+\frac{2a}{1-x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right|+2b=0$$

因为对于任意方程成立，所以$\frac{2a}{1-x^2}+\frac{1}{1-x^2}=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\ln\frac{1}{4}=-2b$

b=ln 2

$\therefore\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\ln 2 \end{cases}$

解法 3：因为函数$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$为奇函数，可得

出 $g(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|=\ln\left|a+\frac{-1}{x-1}\right|$ 的对称中心为 (0,–b)，运用定理 3（函数 $f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$ 为奇函数的充要条件 $\begin{cases}b=1\\d=-2c\end{cases}$)），解出 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\ln 2\end{cases}$

·对比以上解法，我们发现解法 1 注重于奇函数的定义域，解法 2 注重于奇函数的性质，解法 3 则是我们刚才探究找到的规律应用；从难易程度上看，解法 1 要比解法 2 简单很多，而解法 3 不同于前两个解法，需要记住刚才的结论，代入便能直接求值。

变式 1 已知函数 $f(x)=\ln\left|\frac{2x+1}{x-1}+m\right|+n$ 是奇函数，则 m+n=___.

分析 2 因为函数 $f(x)=\ln\left|\frac{2x+1}{x-1}+m\right|+n$ 为奇函数，可得 $g(x)=\ln\left|\frac{2x+1}{x-1}+m\right|=\ln\left|m+2+\frac{3}{x-1}\right|$ 的对称中心为 (0,–n)，运用定理 3（函数 $f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$ 为奇函数的充要条件 $\begin{cases}b=1\\d=-2c\end{cases}$)），解出 $\begin{cases}m=-\frac{1}{2}\\n=\ln\frac{2}{3}\end{cases}$，$\therefore m+n=-\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}$

变式 2 函数 $f(x)=\ln\left|\frac{ax+1}{x}\right|+b$ 为偶函数，且 f(e^2)=1，则 a=___，b=___.

分析 3 因为函数 $f(x)=\ln\left|\frac{ax+1}{x}\right|+b$ 为偶函数，可得 $g(x)=\ln\left|\frac{ax+1}{x}\right|=\ln\left|a+\frac{1}{x}\right|$ 为偶函数，运用定理 4（函数 $f(x)=\log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$ 为偶函数的充要条件为 b=c=0。），解出 a=0，此时 $f(x)=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+b$，因为 f($e^2$)=1=–2+b，所以 b=3。因此 $\begin{cases}a=0\\b=3\end{cases}$，

3 思考与收获

本次我们对于对数函数、绝对值以及分式函数的综合进行性质研究，从简单的 $f(x)=ln\left|1+\frac{1}{x+1}\right|+1$，再拓展推广到 $f(x)=log_a\left|b+\frac{d}{x+c}\right|$，使这一类函数更有普遍性及应用价值。当然，由于参数的数量，研究过程变得复杂。在探究过程中，我们借助数学软件（如 GeoGebra）进行函数图象的可视化，辅助形成猜想并验证结论。当然，这次的研究对我们将来的数学学习有指导性作用，我们可以将这次研究函数的路径与方法运用到其他函数上去，例如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $f(x)=a^x+a^{-x}$。同时，我们也体会到数学其独特的魅力：不管问题有多么复杂，其引人深思且极其有趣的推导过程总吸引着我们对于探索数学的好奇与热爱！

参考文献：

[1] 杜海洋 . 四种策略，求复合函数的对称轴 [J]. 中学生数理化，2025（10）

[2] 张冰 . 例析函数奇偶性的应用 [J]. 中学生数理化，2025（10）

[3] 万穗峰 欧阳正勇 . 分式型函数对称中心的分析研究 [J]. 数理天地 (高中版)，2025 年 .23 期

[4] 颜冬生 顾秋婷 . 探究一类含绝对值函数的参数范围问题 [J]. 数学通讯，2025（11）

作者简介：张晨（2010—），男，汉族，高中生，研究方向为拓展函数模型，为高考提供新的解题思路。