Education and Learning, 教育与学习 (2) 2020, 5
ISSN: 2705-0408(P); 2705-0416(O)

HPM 视角下“用配方法解一元二次方程”的教学

廖汝艳[1] 吴现荣[2]

（1.贵州省册亨县第三中学 贵州黔西南州 552200；2.黔南民族师范学院数学与统计学院 贵州黔南布依族苗族自治州 558000）

【摘 要】配方法解一元二次方程有着丰富的历史背景，该设计借鉴配方法的历史本源，基于学生的认知特征，采用从特殊到一般的数学方法、化归的数学思想和数形结合的数学思想方法，让学生经历配方法的产生过程，更加理解用配方法解一元二次方程，实现新课标提出的“让学生去体验新知识的发生过程”和“体现数学的文化价值”的教学理念。

【关键词】HPM；数学史；配方法；一元二次方程

DOI: 10.18686/jyyxx.v2i5.34130

随着数学史与数学教育（History and Pedagogy of Mathematics，HPM）研究的深入，越来越多的学者认识到数学史对数学教育的价值，数学史融入数学教学也引起了研究者的广泛关注。HPM 视角下的数学教学的基本方法就是重构历史、追求自然的发生教学法，即，从学生的认知起点出发，凸显所学知识的必要性，呈现知识的自然发生发展过程，激发学生的学习动机。用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0$ 在常规的教学中，首先是将 c 移到等号的另一边，再将 a 变换为 1，然后在等式子两边加上（$b/2$）^{2}，再将式子左边写成（$x+b/2a$）^{2}，这种常规的教学方法会使许多学生对直接在等式两边加上（$b/2$）^{2} 产生疑问，从而不能达到应有的教学效果。本文借鉴配方法的历史本源，基于学生的认知特征，采用从特殊到一般的数学方法、化归的数学思想和数形结合的数学思想方法，让学生了解配方法的产生过程，从而更加理解用配方法解一元二次方程。

1 历史材料的择用

在 9 世纪，阿拉伯的一位名叫花拉子米（Mohammed ibn Musa Ai-Khwarizmi，约 783—850）的数学家继承了古希腊的“几何代数”传统，对于解一元二次方程这一类问题，他采用了几何的方法来解答。《代数学》中的一个问题是：“一平方与十根等于三十九迪拉姆，求根”（即求解方程 $x^2+10x=39$）。花拉子米将方程左边的 x^2+10x 看作边长为 x 的正方形和长为 x、宽为 10 的矩形面积之和，先将长为 x、宽为 10 的矩形拆分为长为 x、宽为 5 的两个矩形，将这两个矩形与边长为 x 的正方形拼接在一起，然后再添加一个边长为 5 的正方形，如图 1 所示，可以通过图形的面积关系求出 x。

古希腊的数学家海伦用纯代数法解一元二次方程，对于方程 $ax^2+bx+c=0$，首先将 c 移到等号的另一边，等号两边同乘 a，然后在等号两边加上（$b/2$）^{2}，接下来将式子一边写成（$ax+b/2$）^{2}，然后开平方，即得到 x。

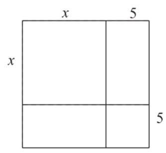

图1

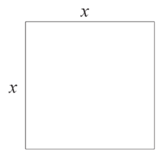

图2

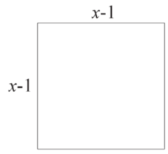

图3

2 教学过程设计与实施

2.1 复习旧知识

师：老师出示以下题目，让学生用直接开平方法来解题。

① $x^2=25$；②（$x-1$）^{2}=4；③ $x^2+10x=39$

生：对于前两道题目，学生能够很快的想到用直接开平方法解答，但对于第三题，用直接开平方法无法解答，大部分的同学都没有解题思路。

师：启发引导学生将 x^2、（$x-1$）^{2}= 看成边长为 x、$x-1$ 的正方形的面积，求出对应的边长，进而求出 x，具体的图形如图 2 和图 3 所示。在古代，开方就相当于“已知正方形面积求边长”。

师：让同学们思考一下，第三个方程是否可以用这种几何方法求解？

设计意图：采用从特殊到一般的数学方法和数形结合的数学思想方法。让学生掌握特殊方程的几何意义。通过第三个方程设疑，引发思维的碰撞，从而为新知识的引入做了很好的铺垫。

2.2 引入新课

教师出示 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米在《代数学》中提出的一个问题来引入新课。

问题：“一平方与十根等于三十九迪拉姆，求根”。

师：教师阐述这个问题所要表达的意思，阿拉伯人通常把未知数称为“根”，未知数的平方称为“平方”，迪拉姆则是他们使用的货币单位，并无实际意义。所以这个问题所要表达意思是 $x^2+10x=39$。

师：对于该问题，是否也可以借助几何图形来解决呢？请同学们观察一下，这个方程的左边可以表示成什么图形？

设计意图：利用改编过的历史问题来引入新课，让学生掌握知识之源，使学生发现这一问题和复习旧知中的第三个方程一样，可以借助几何图形解答，从而产生情感之悦。

生：x^2+10x 是边长为 x 的正方形面积与长为 x 和宽为 10 的长方形面积之和，其值为 39。

但是一个正方形加一个长方形不是正方形，也不能开方，这要怎么办？

师：能否将如图 4 所示的图形补成一个正方形？教师启发引导，由学生上黑板上将图形补成正方形。

生：学生在黑板上将图形补成如图 5 所示的正方形。

师：我们可以看到，在原式子的基础上，这个图形可用公式 $x^2+10x+10x+100=39+100+10x$ 表示，即（x+10）^{2}=139+10x，式子左边是完全平方公式，右边是一次式，也不能用直接开平方法，难道用这种方法行不通吗？

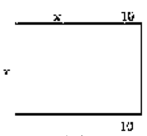

图4

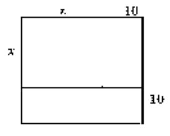

图5

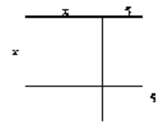

图6

生：将长为 x 、宽为 10 的矩形一分为二，再把其中一半移到正方形的下方，最后补上边长为 5 的小正方形，如图 6 所示。

师：太棒了！和花拉子米的做法完全一样！请同学们想一想，这样的操作能否求解方程呢？

生：这个图形可用公式 $x^2+5x+5x+5^2=39+5^2$ 表示，写为（x+5）^{2}=64，就能求 x 。

师：总结归纳配方法解一元二次方程的具体步骤：将 a 变换为 1；将 c 移到等号另一边；等号两边加上（b/2）^{2}；等号左边写成（x+b/2a）^{2}；求 x 。

设计意图：教师的启发、学生的相互合作学习与探讨，使学生潜移默化的学会用几何方法解一元二次方程，这有助于学生理解新的知识点，可以促进学生培养“直观想象”的核心素养。

师：对于 a 是 1，用几何方法它能解出来，若 a 不是 1，能否用此方法？并举例说明。

生：老师，既然 a 是 1 能用几何方法解，那我们把方程 $2x^2-3x=-1$ 的 2 变换为 1 啊！

师：不错，这位同学反应能力很好，值得鼓励。如果我们没有学过用几何方法解答，你们会怎么做呢？

生：既不可以直接开平方，也不可以用几何方法，那这个方程要怎么解？（同学们都在思考着，但是无法解决。）

设计意图：通过比较二次项系数为 1 与不为 1 的两种情况，引发学生思考，能够充分的调动学生的积极性，让学生知道任何一道题，其解题方法都不是唯一的。

师：向学生介绍古希腊数学家海伦用纯代数方法解 $ax^2+bx+c=0$ 方程的步骤：将 c 移到等号另一边；等号两边同乘 a ；在等号两边加上（b/2）^{2}；将等号一边写成（ax+b/2）^{2}；开平方。

师：如何用数学家海伦用纯代数方法求解同学举例的方程 $2x^2-3x=-1$？

生：解：将方程 $2x^2-3x=-1$ 两边同乘 2 得 $4x^2-6x=-2$，两边同加 $(-3/2)^2$ 得 $4x^2-6x+(-3/2)^2=-2+(-3/2)^2$，即 $(2x-3/2)^2=1/4$，直接开平方得 $(2x-3/2)=\pm1/2$，即 $x_1=1$，$x_2=1/2$。

设计意图：通过介绍海伦的纯代数法求解方程方法，并向学生解释为什么要乘 a ，这一环节将重心转到了一元二次方程的一般形式上来，通过比较二次项系数为 1 与不为 1 的两种情况，让学生知道任何一道题，其解题方法都不是唯一的，培养学生的发散思维。

师：同学们发现这两种方法的共同点与不同点了吗？

生 1：都有一起加 $(b/2)^2$ 。

生 2：不管怎么变，最后都可以化为直接开平方的形式。

生 3：不同点是用几何方法时，a 需变换成 1，c 要移到等号另一边，用代数法时 a 不用变换成 1。

师：让学生思考当二次项系数为 1 时，可以用代数法吗？

生：当二次项系数为 1 时，可以在方程的左右两边同时乘 1 啊！

师：老师对学生进行表扬，总结用几何方法与代数方法解方程的思想和过程，点明这是配方法。

2.3 配方法的应用

例 1　小芳家准备在一块土地上建一个面积为 1596 m^2 的羊圈，羊圈的宽比长少 4 m，羊圈长、宽分别是多少？

解法一（几何方法）：设羊圈宽为 x 米，长为 $(x+4)$ 米，根据面积为 1596 m^2，列方程 $x(x+4)=1596$，即 $x^2+4x=1596$。

构造如图 7 所示图形，由面积关系得 $x^2+2x+2x+2^2=1596+2^2$ 即 $x^2+4x+4=1596+4$，配方得 $(x+2)^2=1600$，两边开方得 $(x+2)=\pm40$，解得 $x_1=42$，$x_2=-38$（舍去），因此绿地宽为 42 米，长为 46 米。

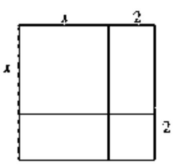

图7

解法二（代数方法）：原方程为 $x^2+4x=1596$ 两边同乘 1 得

$$x^2+4x=1596$$

两边加上 $(4/2)^2$ 得 $x^2+4x+(4/2)^2=1596+(4/2)^2$ 两边写成完全平方得 $(x+2)^2=1600$，两边开方得 $(x+2)=\pm40$，解得 $x_1=42$，$x_2=-38$（舍去）。因此绿地宽为 42 米，长为 46 米。

例 2　用配方法解方程：① $x^2+2x-3=0$ ② $(x-1)^2=6$

解法一：将方程化为 $x^2+2x=3$ 两边加上 $(2/2)^2$ 得

$$x^2+2x+(2/2)^2=3+(2/2)^2$$

即 $(x+1)^2=4$，则 $(x+1)=\pm2$，解得 $x_1=1$，$x_2=-3$

（以上是同学用代数方法解答）

解法二：如图 8 所示，将 $(x-1)^2$ 看成边长为 $(x-1)$ 的正方形的面积，即面积是 6，则 $(x-1)=\pm\sqrt{6}$，解得 $x_1=\sqrt{6}+1$，$x_2=-\sqrt{6}+1$。

（以上是同学用几何法解答）

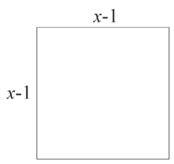

图8


图9

设计意图：例 1 由师生共同完成，分别用代数方法和几何方法求解，培养学生的发散思维，学会一题多解。例 2 由学生上黑板来做，可以检验学生对几何法与代数方法的掌握程度，及时反馈教学成果。

2.4 课堂小结

临近下课，教师让学生谈谈对本节课的收获，学生发言都积极，下面是部分学生的回答。

同学 1：我知道了关于解方程 $ax^2+bx+c=0$ 用配方法来解的历史来源。

同学 2：我知道了阿拉伯数学家花拉子米在《代数学》中提出的方程问题。

同学 3：我知道了用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0$ 的方法。

同学 4：当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的 a 是 1，可以用几何方法，a 不是 1，两种方法都能用。

同学 5：我知道为什么配一次项系数的一半。

同学 6：我知道海伦的纯代数法求解方程方法。

2.5 课后作业

① 解方程：$x^2+10x+16=0$；$3x^2+6x-5=0$（必做题）。

②将几何方法与代数方法的解题步骤写出来，自编三个一元二次方程，采用两种方法求解方程，体验哪种方法解方程更加简单（选做题）。

设计意图：作业分层处理，尊重学生的个体差异，满足多元化的学习需要，让不同基础的学生得到不同的发展。必做题让同学能够更好的理解所学内容；选做题的设计是根据学生的层次不同来布置的，有利于同学们课后再复习一遍知识点，从而提高教学效果。

3 课后信息反馈

下课后，教师对全班 40 位同学做了调查问卷。关于问题“你喜欢数学史吗？”，90% 的学生回答“非常喜欢”和“喜欢”，仅有 10% 的学生回答“不喜欢”；关于问题“你的老师在以往的课堂上讲数学史吗？”，32.5% 的学生回答“经常讲”，47.5% 的学生回答“偶尔讲”，20% 的学生回答“根本不讲”；关于问题“花拉子米解方程的方法，你了解多少？”42.5% 的学生“没有听说过”，仅有 12.5% 的学生“了解一点”；关于问题“对于古希腊数学家海伦用纯代数方法解一元二次方程你了解多少？”，20% 的学生“没有听说过”，仅有 15% 的学生“了解一点”；对于问题“你认为引入数学史来讲用配方法解一元二次方程有没有必要？为什么？”，82.5% 的人认为有必要，认为上课内容加入数学历史他们可以全神贯注的听课，更加清楚为什么配一次项系数的一半。以上几个问题的调查结果，表明了数学史融入中学数学教学的重要性和必要性。

4 结语

本教学设计追溯配方法的历史本源，基于学生的认知特征，采用从特殊到一般的数学方法、化归的数学思想和数形结合的数学思想方法，让学生了解配方法的产生过程，重新发现历史上数学家的几何方法，完成与古代数学家的一次“跨越时空的心灵之交”，既积累了学生的数学活动经验，又拉进了他们与数学的距离。从而实现了新课标提出的“让学生去体验新知识的发生过程”和“体现数学的文化价值”的教学理念。课堂练习和课后作业的信息反馈，基本实现预设的教学目标。

作者简介：廖汝艳 (1995—)，女，贵州普安人，中学二级教师，研究方向：中学数学教学。

基金项目：贵州省教育规划项目（2020B202）；教育厅高校人文社会科学研究项目（2018zc028）；贵州省教育厅高校人文社会科学研究项目（2018zc028）；黔南民族师范学院校级项目（编号：qnsy2018029）阶段性成果。

【参考文献】

[1] 王振辉，汪晓勤. 数学史如何融入中学数学教材 [J]. 数学通报，2003（9）：18-21.
[2] 汪晓勤. HPM 视角下一元二次方程解法的教学设计 [J]. 中学数学教学参考，2007（1）：114-116.
[3] 吴现荣，宋军. HPM 视角下的数系的扩充与复数的引入教学 [J]. 数学教学，2016（10）：39-42.
[4] 吴现荣，姚绍柳，蒙艳虹. 文化视角下平方差公式的教学 [J]. 数学通报，2018（3）：36-40.
[5] 沈志兴，洪燕君. “一元二次方程的配方法”：用历史体现联系 [J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2015（10）：38-42.