

浅谈四色猜想与费马猜想

翟冬阳

(三亚学院理工学院 海南三亚 572022)

【摘要】 四色猜想、费马猜想和哥德巴赫猜想这三大数学猜想被称为世界近代三大数学猜想。本文简单介绍了四色猜想和费马猜想的提出和发展,展示了这两大问题由猜想变为定理所经历的坎坷路程。

【关键词】 猜想;四色猜想;费马猜想

DOI:10.18686/jyyxx.v2i12.39308

1 四色猜想

四色猜想,也被俗称为四色问题或者四色定理,它是组合数学的分支图论中最重要的猜想。这个猜想是由一位英国伦敦大学生古德里(Francis Guthrie)于1852年提出来的^[1]。当时的他刚从伦敦大学毕业,在一家研究机构工作,具体内容是给各类地图着色。他在工作中注意到对于任意一幅地图都可以只用四种颜色去染色,能达到让任意相邻的区域都不同色。这个有趣的现象引起了他的思考,于是他尝试给出这一现象在数学上的理论证明,虽然他花了很长的时间,但是没有什么成效,于是他将这一问题分享给了他给正在读大学的弟弟,两个人又经历了一段没有任何结果的探索。

弟弟的数学老师是著名的数学家德·摩尔根(毕业于剑桥大学三一学院,伦敦数学会的第一任会长)。同年10月23日,他的弟弟向德·摩尔根提出了这个问题,摩尔根也束手无策,于是他给自己的好友哈密尔顿(图论中哈密尔顿圈的问题就是他提出的)写信寻求帮助。但直到1865年哈密尔顿逝世,四色猜想的问题都没有能够被解决。

又过了7年,英国当时最著名的数学家凯利(不变量理论的奠基人)正式向伦敦数学学会提出了四色猜想的问题,于是四色猜想开始进入人们的视野,成为世界数学界和数学爱好者非常关注的一个难题。当时数学家戏称四色猜想为“四色瘟疫”,因为它命题简单,一般人都能很快理解它的意思,很容易就让你有想去“试试”的冲动,于是你被传染了,然后深陷其中无法自拔。

又过了6年,也就是在1878年到1880年这两年间,著名的数学家肯普(Alfred Kempe)和泰勒(Peter Guthrie Tait)分别给出了四色猜想的证明,数学家们都以为四色猜想这个问题已经得到了解决。“四色瘟疫”开始淡出人们的视野。11年后,即1890年,正在牛津大学就读的学生赫伍德指出了肯普在四色猜想上的证明存在缺陷。同时他还给出了一个反例,用肯普的证法不能说明它可以做到四着色同时相邻区域不同。这就是著名的赫伍德反例。没过不久泰勒关于四色猜想的证明也被给出了反例。(有段时间我国经常有四色猜想解决的新闻,都是关于一些民间科学家解决四色猜想的新闻,但这些都是证明一些反例可以四着色)。

到了1976年6月,美国的两位数学家阿佩尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上用了1200个小时,做了超过100亿次判断,证明了任何一张地图都可以做到四着色使其相邻区域不同色,最终通过计算机演算判断的方式证明了四色猜想,轰动了整个数学界,从而将四色猜想改名为四色定理。这是一百多年数学家与数学爱好者的大事,因为四色猜想让太多数学家或者数学爱好者投入其中,着迷其中,就像中了“瘟疫”。当这两位数学家将研究成果正式发表在期刊上时,当地的邮局为了纪念这特殊的一天,在当天发出的所有信件的信封上都加盖了“FOUR COLORS SUFFICE”的特制印章,以庆祝这一“简单的”数学难题的解决(图1)。

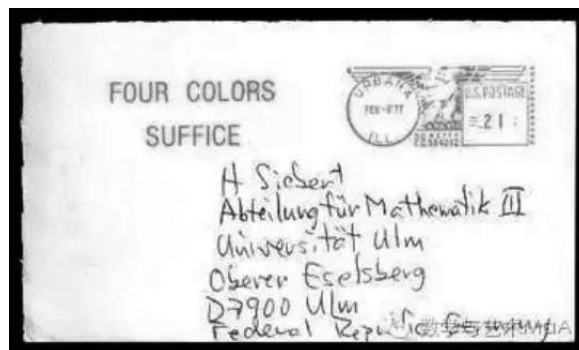


图1 加盖了“四色足够”的信封

由于计算机无法给出让数学家们信服的严密推理过程和思考过程,只能说明举不出反例,即四色定理的证明未能从正面解决,追根求底的数学家们显然对计算机的结果并不满意,继续寻求着关于四色定理的理论证明。

2 费马定理

费马猜想,又称费马大定理,与四色猜想、哥德巴赫猜想并称为世界近代三大数学猜想。1637年,有着“业余数学家之王”称号的著名数学家费马在研究《算术》的时候,在该书的一个空白地方写了一句话:“将一个立方数分成两个立方数之和,或一个四次幂分成两个四次幂之和,或者一般地将一个高于二次的幂分成两个同次幂之和,这是不可能的。关于此,我确信已发现了一种美妙的证法,可惜这里空白的地方太小,写不下。”^[2]就是这简简单单特别朴素的一句“空白的地方太小,写不下”,困扰了无数数学家和数学爱好者350年(图2)。



图2 费马纪念邮票(邮票内容即费马猜想)

关于费马猜想还有一件有趣的事。德国一位实业家沃尔夫斯科尔(Wolfskehl),年轻的时候为情所困,有了很强的自杀念头,于是决定在某天晚上了却自己。就在准备自杀的那天晚上,他读到柯西和拉梅对费马猜想的证明,正在惊叹于证明的巧妙之处时,他又惊奇地发现库默尔指出了这看似完美的证明存在错误之处,思想上再一次受到冲击,于是他情不自禁地拿出笔演算起来,十分投入,等到他停笔时,才发现天已经亮了,已经错过了他设定好的自杀时间,但是他还没算完,还没有搞清楚这个问题,于是他放弃了自杀的念头。沃尔夫斯科尔认为是数学让他重获新生,特别是费马猜想。最后他成了大富豪,到了1908年,这位富豪死时,遗嘱将其一半遗产捐赠,设立了一个专门的奖项,以谢费马猜想的救命之恩。他针对费马猜想设立了一个专项奖金,在他逝世后的一百年内,第一个解决费马猜想难题的人将获得这一专项奖金,奖额为10万马克。

1753年著名的瑞士数学家欧拉,在写给哥德巴赫的信中提到,他证明了当 $n=3$ 时的费马猜想成立,1770年这个证明被发表在《代数指南》这本书中。对于 $n=4$ 的情形费马本人给出了证明。1985年,罗瑟给出了 n 小于41000000时费马猜想成立,但他的证明方法是用计算机实现的。当然费马猜想在很多特殊的情形下都给出了不同的证明,这其中也不乏一些曲折和戏剧性的事件。

1995年,英国数学家安德鲁·怀尔斯经历了8年的磨难,给出了费马猜想的证明。至此,困扰了数学界350年的数学难题终于有了一个完美的归宿。怀尔斯因此当选为美国国家科学院外籍院士并获该科学院数学奖,获欧洲的奥斯特洛夫斯基奖、瑞典科学院舍克奖、法国的费马

奖、美国数学会科尔奖、我国香港的邵逸夫奖等等。当然还包括1996年度沃尔夫奖和1908年沃尔夫斯科尔(Wolfskehl)为解决费马猜想而设置的10万马克奖金。

1993年6月23日,牛顿研究所举行了20世纪最重要的一次数学讲座。两百多名数学家聆听了这一演讲,但他们中只有不到四分之一的人能完全懂得黑板上的希腊字母和代数式所表达的意思。其余的人来这里是为了见证他们所期待的一个真正具有意义的时刻。演讲者是安德鲁·怀尔斯。怀尔斯回忆起演讲最后时刻的情景:“虽然新闻界已经刮起有关演讲的风声,很幸运他们没有来听演讲。但是听众中有人拍摄了演讲结束时的镜头,研究所所长肯定事先就准备了一瓶香槟酒。当我宣读证明时,会场上保持着特别庄重的寂静,当我写完费马大定理的证明时,我说:‘我想我就在这里结束’,会场上爆发出一阵持久的鼓掌声。”《纽约时报》在头版以《终于欢呼“我发现了!”》,久远的数学之谜获解》为题报道费马大定理被证明的消息。一夜之间,怀尔斯成为世界上唯一的最著名的数学家。同年《人物》杂志将怀尔斯与戴安娜王妃一起列为“本年度25位最具魅力者”。

直到1993年8月23日,怀尔斯再一次成了媒体报道的中心,因为其中一位审稿人(为了让这一成果最快问世,多个审稿人分别审稿不同部分)尼克·凯兹发现了其证明中存在一个小漏洞。怀尔斯以为这只是一个很小问题,补救的办法应该很容易找到。一直到1994年的9月19日,怀尔斯才将其补救过来,中间不知道经历了多少次放弃的念头。怀尔斯终于在1995年的5月将费马猜想的证明成果发表在《数学年刊》上,从而费马猜想改名费马定理。怀尔斯再一次出现在《纽约时报》的头版上,标题是《数学家称经典之谜已解决》。

3 结语

对于猜想的产生与发展的讲解,能激发学生们对于数学类课程学习的积极性,提升学生们学习数学的兴趣与热情。

作者简介:翟冬阳(1989—),女,辽宁辽阳人,讲师,硕士,研究方向:图论。

基金项目:三亚学院科学研究项目“蕴含 k 树可图序列的极值问题”(编号:USY18YSK061)。

【参考文献】

- [1]刘彦佩. 平面图理论与四色问题(I)——平面性与对偶性[J]. 数学研究及应用, 1983, 3(3):123-136.
- [2]柯召,孙琦. 关于费马大定理[J]. 自然杂志, 1980(7):11-13.