

一道含余弦函数极限题的正确求法及可视化

王培颖 陈晓敏 韩明华 陆梓东 赵梓谷 姚允铨
(广州理工学院 广东广州 510540)

【摘要】含三角函数的极限题容易出错。本文对一个 $\frac{0}{0}$ 型的极限题采用了一些大同小异的方法求解，并且做了可视化。充分利用现代通讯工具，是学习和交流的良好方法。

【关键词】极限；等价无穷小；洛必达法则

DOI : 10.18686/jyyxx.v3i2.40715

为了帮助同学们学习高等数学，老师建立了一个高等

数学学习群，老师提出一个求极限的问题：

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$$

这是一个 $\frac{0}{0}$ 型的极限题，有的同学的计算过程是

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

老师问：你认为对吗？请写出正确的过程和结果。有

几位学生做出了正确的结果，方法大同小异，现将方法总

结如下：

1 多种思路 and 正确结果

首先通分

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

分子用倍角公式，分母用等价无穷小量 $\sin x \sim x$ ，化为

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4}$$

应用洛必达法则，可得(如果分母不利用无穷小量

$\sin x \sim x$ ，则应用洛必达法则就比较麻烦。)

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x \cos 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 4x}{8x^3}$$

再用一次洛必达法则，可得

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos 4x}{24x^2}$$

有同学利用半角公式 $1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x$ 和等价无穷

小量，求得

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

有的同学用两次洛必达法则，也得到 $\frac{4}{3}$ 的结果。

有的同学先不用洛必达法则，而应用平方差公式，化

为

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - \sin^2 2x}{4x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x + \sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x - \sin 2x}{2x^3} \right] \end{aligned}$$

则, 可得

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot \frac{2x - \sin 2x}{2x^3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

有同学则利用关系 $x - \sin x \sim x^3/6$, 可得

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \sin 2x)(2x)^3 / 6}{4x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin 2x}{3x} \end{aligned}$$

这时, 不论是用等价无穷小还是用洛必达法则, 都可得到极限 $4/3$ 。

2 可视化

一位同学设计了一个简短的 MATLAB 程序, 计算极限并画函数曲线。如图 1 所示, 函数是先升后降的偶对称曲线, 在 x 趋向于 0 时的极限为 $4/3$ 。用 MATLAB 计算的结果与用人工计算的结果完全相同, 证明了人工计算的正确性。

3 结论

对于含有余弦函数的极限题, 不能单独利用极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。这个极限题虽然简单, 各种求极限的方法大同小异, 但是都能扩大解题思路。用 MATLAB 画出函数曲线直观说明了函数的极限。在群中学习和交流是一种很好的学习方法。

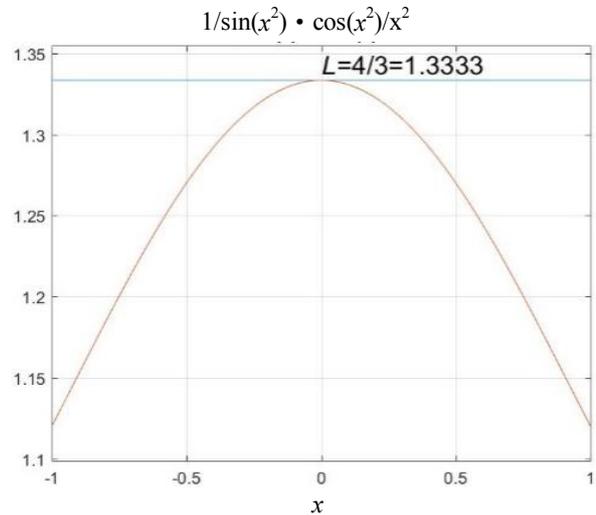


图 1

作者简介: 王培颖 (1979.3—), 女, 硕士, 副教授, 研究方向: 微分方程。

基金项目: 校级精品资源共享课项目 (项目编号: 2017XJJG06); 校级教学成果奖培育项目 (项目编号: 2019JXJPY020)。

【参考文献】

- [1] 周群益, 等. MATLAB 可视化高等数学 (上册) [M]. 湖南: 湖南大学出版社, .2011.
- [2] 同济大学数学系编. 高等数学 (上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.