Universe
Scientific Publishing
Education and Learning, 教育与学习(3)2021, 7
ISSN:2705-0408(P); 2705-0416(0)

浅谈两个重要极限求极限

马晓虎
（兰州资源环境职业技术学院　甘肃兰州　730021）

【摘　要】用洛必达法则证明推广了两个重要极限公式，利用推广公式方便学生解决求极限的问题。

【关键词】极限；重要极限；洛必达法则
DOI：10.18686/jyyxx.v3i7.50494

极限的计算理论是微积分学习的基础，也是“高等数学”这门课中的重要内容，其中解决函数的连续性问题、是否可导、定积分的运算等都需要借助于极限理论。假如有人在学习“高等数学”这门课之前要了解这是一门怎样的学科，可以简单概括为“高等数学”就是用极限理论来研究函数的一门学科，并且使其计算结果误差小到无穷小，几乎可以忽略不计。

极限计算理论方法是学习“高等数学”必不可少的一种重要方法。正是有了极限计算理论，才使得“高等数学”能够解决许多初等数学无法解决的求瞬时速度、曲边形面积、曲线弧长、曲面体的体积等问题；正是利用了极限的计算理论方法，才能够计算出无比精确的答案。只有掌握了极限理论，才能够理解从有限变量到无限变量，换句话说极限计算理论是初等数学到高等数学过渡的桥梁，具有承前启后连贯性的作用。

求极限是“高等数学”中基础的理论知识，对大部分学生的理解学习都有困难，特别是刚刚学习了极限的概念后又要利用两个重要极限进行极限运算就更困难，此文利用洛必达法则证明推广了两个重要极限公式，利用推广公式方便学生解决极限问题，也有利于学生理解“高等数学”中的很多概念。

洛必达法则$\frac{0}{0}$型的定义式为若函数$f(x)$和$\varphi(x)$满足：

①在点x_0的某去心领域$\mathring{U}(x_0)$内两者都可导，且$\varphi'(x)\neq 0$；

②$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$；

③$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=L$，则$\lim\limits_{x\to x}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=L$。

第一类重要极限为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，若$f(x)\to 0$，$\sin f(x)\to 0$，则$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\frac{(\sin f(x))'}{(f(x))'}$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\frac{(\cos f(x))'\cdot(f(x))'}{(f(x))'}=\lim_{f(x)\to 0}\cos 0=1$$

即$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$（1）*

第二类重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$符合洛必达法则未定型中$1^\infty$型，可以转化成$\frac{0}{0}$型。依据指数函数的特性可知，指数函数在其定义域中为连续函数，计算函数和求极限值可以交换次序.

$$\lim 1^\infty\Rightarrow e^{\lim\infty\cdot\ln 1}\Rightarrow e^{\lim 0\cdot\infty}\Rightarrow e^{\lim\frac{0}{\frac{1}{\infty}}}\Rightarrow e^{\lim\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e。$$

第二类重要极限为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，若$x\to\infty$时$f(x)\to\infty$，则$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}(1^\infty)$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to\infty}f(x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}\cdot\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}}=e。$$

即$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$（2.1）*

第二类重要极限推广公式为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，若$x\to 0$时$f(x)\to 0$，则

$$\lim_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}(1^\infty)$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\ln(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}\ln(1+f(x))}$$

Education and Learning, 教育与学习(3)2021, 7
ISSN:2705-0408(P); 2705-0416(0)

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\left(\frac{0}{0}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{f(x)\to\infty}\frac{\frac{1}{1+f(x)}\cdot(f(x))'}{(f(x))'}}=e。$$

即 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e$（2.2）*

利用推广的3个公式*，可以容易解决两个重要极限的问题。下面举例说明：

求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\frac{1}{\cot x}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\frac{1}{\cot x}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\frac{1}{\cot}}}_{\text{利用(2)*}=e}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=$$

$$e\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}}_{\text{利用(1)*}=1}=0.$$

作者简介：马晓虎（1980.9——），男，甘肃白银人，副教授，研究方向：数学教育及应用数学。

【参考文献】

[1] 何春江.高等数学[M].北京：中国水利水电出版社，2004.
[2] 同济大学数学教研室.高等数学（上册）第 4 版[M].北京：高等教育出版社，2000.
[3] 刘玉琏，傅沛仁.数学分析讲义（上册）第 3 版[M].北京：高等教育出版社，1999.