Universe
Scientific Publishing

Education and Learning, 教育与学习(3)2021, 7
ISSN:2705-0408(P); 2705-0416(0)

关于行列式的定义及其运算的教学注记

曾德炎　翟冬阳
（三亚学院　海南三亚　572022）

【摘　要】行列式是线性代数课程的重要研究对象，也是线性代数课程中学习其他知识点的重要工具，学好行列式是学好线性代数的必要条件。本文主要介绍行列式的定义及其计算中学生的理解误区以及解决方法，以便于更好的帮助学生掌握行列式的相关内容。

【关键词】行列式；定义；计算

DOI：10.18686/jyyxx.v3i7.50505

行列式是研究线性代数的一个重要工具，它是为了求解线性方程组的解而引入的一个数学概念，目前在工程技术、物理等多个领域得到了广泛的应用[1]。下面我们分几个部分进行讨论。

1　引入

通过二元线性方程组的解与二阶行列式的关系引出二阶行列式的定义，同时提升学生学习的积极性。

首先通过消元法给出最一般的二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

强调二元线性方程组的解的分母相同，并且均来至于线性方程组的四个系数。通过这个共性给出二阶行列式的定义：

定义 1[2]：由四个数排成二行二列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$，表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为该数表所对应的二阶行列式，记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$。即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。

给出二阶行列式的定义后，强调行列式本身是一个数，而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是它的记号。比如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4 - 2\times3 = -2$，解释 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 就是一个二阶行列式，而它的本质是数 -2。那么问题自然被引出，-2 是怎么计算来的，从而给出了二阶行列式的对角线法则。紧接着通过二阶行列式给出二元线性方程组的解，给出了学生已学知识的一种简单解法和无限想象，从而提高同学们学习的积极性。

紧接着我们给出三阶行列式的定义和计算。对于沙路法我们要强调它只适用于三阶行列式的计算，由于二阶行列式用沙路法一共有 4 项，违背二阶行列式的定义。对于三阶行列式的对角线法则要强调它与二阶行列式的对角线法则不同，如果用二阶行列式的对角线法则，它的结果只有 2 项，而三阶行列式的定义一共有 6 项，违背定义。强调不管是二阶行列式还是三阶行列式的对角线法则，以及三阶行列式的沙路法，都是特殊的方法，不适用于更高阶行列式。最后通过三阶行列式的计算给出三元一次线性方程组的解，再次提升学生们学习的兴趣和积极性。

二阶行列式和三阶行列式的定义和计算相对容易，学生的接受效果均不错，接下来的 n 阶行列式的定义是难点。

2　定义

在介绍 n 阶行列式的定义之前，我们首先给出全排列（强调一下全排列和排列数的区别）、逆序数以及行标和列标的定义，这个学生也很容易接受。接着对比三阶行列式的定义，通过设问的方式给出 n 阶行列式的定义。

定义 2[2]：由 9 个数排成三行三列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为该数表所确定的三阶行列式。

问题 1：三阶行列式一共有多少项？

问题 2：在行标是标准次序的前提下，列标有什么规律？为什么问题 1 的答案为 6？每一项的各个元素在位置上有什么特征？

问题 3：为什么有三项为正三项为负，每一项前面的正负号是如何确定的？

问题 4：如果我们用 $p_1p_2p_3$ 来表示元素 1，2，3 的全排列，列出 $p_1p_2p_3$ 的所有可能性。设 t 是 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，列出 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的所有可能结果（这个环节很重要，

本质是让学生通过n阶行列式的定义给出行列式的每一项，如果放在四阶行列式当然更好，但四阶行列式的项太多，不太合适）。能不能用$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$来定义三阶行列式？

问题 5：如果我们用$p_1p_2p_3p_4$来表示元素 1，2，3，4 的全排列，设 t 是排列$p_1p_2p_3p_4$的逆序数，若能用$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$来定义四阶行列式，那么四阶行列式一共有多少项？每一项的元素有什么位置特征？多少项为正多少项为负？

我们想要的答案就是n阶行列式可以理解为求所有可能的位于既不同行也不同列的元素的乘积的代数和。可以具体定义如下：

定义 3[2]：设由n^2 个数排成一个n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为该数表所确定的n阶行列式。这里$p_1p_2\cdots p_n$为元素$1,2,\ldots,n$的全排列，t是$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数。

给出n阶行列式的定义后，设问巩固：

问题 1：n阶行列式一共有多少项？

问题 2：在行标是标准次序的前提下，列标有什么规律？从而每一项的各个元素在位置上有什么特征？

问题 3：每一项前面的正负号是如何确定的？

有了n阶行列式的定义后，可以针对例题讲解，如何通过行列式的定义计算行列式，例题可以举具体的四阶对角行列式，不建议用n阶非具体的对角行列式作为第一个例题，这样解释的重点可能放在n那里。练习题可以分别用一个四阶上三角行列式和一个n阶下三角行列式。

3 展开式

在介绍行列式的展开式之前，先介绍余子式与代数余子式的定义，这个相对简单，同学们接受情况较好。接着给出三阶行列式的展开式，引导同学们给出 阶行列式展开式的结论。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

先给出三阶行列式的一个结论：任意一个三阶行列式都可展开成第一行的各个元素与其对应的代数余子式的乘积的和。设问引出行列式的展开定理。

问题 1：三阶行列式能不能按照第二行展开，也就是三阶行列式能不能展开为第二行的各个元素与其对应的代数余子式的乘积的和？

问题 2：三阶行列式能不能按照第一列展开，也就是三阶行列式能不能展开为第一列的各个元素与其对应的代数余子式的乘积的和？

问题 3：三阶行列式能不能按任意一行或者任意一列去展开，也就是说三阶行列式能不能展开成任意一行或者任意一列的各个元素与其对应的代数余子式的乘积的和？

问题 4：那么n阶行列式能不能展开成任意一行或者任意一列的各个元素与其对应的代数余子式的乘积的和呢？

问题 4 教师可以直接给出答案，从而引出n阶行列式的展开定理：

定理 1[2]：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

例题讲解时，很多教材都用这个行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

，这个行列式不好的地方是让同学们误以为行列式可展开为任意一行或者任意一列的某一个元素与其对应的代数余子式的乘积的和，这个理解错误是大面积的，所以不建议用类似的行列式。我们可以把第三行第一列的 0 改成-1，避免同学们的错误理解。对于行列式的展开式定理以及推论，经管类学生可以避开证明，避免第一次课就太难，部分学生提前放弃。

4 性质

在介绍行列式的性质之前，首先介绍行列式的转置运算。行列式的转置运算可以理解为沿对角线对折或者行列互换。建议强调行列互换，这样可以与矩阵的转置运算统一。行列式的性质是计算行列式的最常用的方法：利用性质 2，3，5 特别是性质 5 把行列式化为上（下）三角形行列式，从而得到行列式的值。这里我们主要介绍性质 5 的应用上，学生容易犯的错误。性质 5 的证明用到了性质 4 和推论 3，关于性质和推论的证明相对简单，建议给出证明。

性质 5[2]：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

我们在给出行列式的性质 2，3，5 的符号后，再重点强调运用性质 5 求行列式的值时，可以通过具体的行列式关于下面几个运算来帮助同学们对比理解：r_1+r_2，

Education and Learning, 教育与学习(3)2021, 7
ISSN:2705-0408(P); 2705-0416(0)

r_2+r_1，r_1-2r_2和r_2-2r_1。目的是强调要变的是前面的行，不管有没有系数后面的行都不变。在用性质 2，3，5 把行列式化为上三角形行列式的过程中，要特别强调其思路就是依次用对角线上的元素将对角线下的元素消为 0。那么对于对角线上的元素就要做到两点：能用、好用。所谓能用指的是要用的这个对角线上的元素不能为 0，若为 0 可以通过性质 2 换行（注意不能与上面的行换），从而做到能用；所谓好用指的是要用的这个对角线上的元素最好为 1 或-1，退而求其次可以为下面元素的公因子，若做不到可以通过性质 2 换行（注意不能与上面的行换）或性质 3 让该元素所在行乘以一个分数使该元素变为所在列下面元素的公因子（注意：1.该行尽量不要产生分数；2.行列式需要加系数）。最后通过例题与练习针对讲解，练习可以通过雨课堂等手段拆解练习，这样方便及时发现问题，针对解决问题。

这样，学生对行列式的定义和计算方法就有了深刻的理解和较好的掌握，为后期相关内容的学习打下良好的理论基础。

作者简介：曾德炎（1989—），男，湖北荆州人，硕士，讲师，研究方向：图论。

【参考文献】

[1] 闫伟文，白庆月.逆矩阵的教学设计[J].大学，2021（19）：68-71.

[2] 吴赣昌.线性代数（简明版第五版）[M].北京：中国人民大学出版社，2017.