教育与学习 4 卷 10 期
ISSN: 2705-0408(Print); 2705-0416(Online)

“非对称韦达定理结构”

——

徐春艳
镇江中学 江苏 镇江 212300

摘 要：本文通过探究化简求值“非对称韦达定理”结构的运算技巧，训练学生的数学思维，让学生学会思考，进而总结出解决这类恒成立问题的一般解题策略。

关键词：“对称韦达定理“结构；“非对称韦达定理”结构；积和互化；局部运算；整体约分

"Asymmetric Veda's Theorem Structure"
--Exploration of Arithmetic Techniques in the Reduction of Conic Curves

Chunyan Xu
Zhenjiang Middle School Jiangsu Zhenjiang 212300

Abstract: This paper trains students' mathematical thinking by exploring the calculation techniques of simplifying the structure of "asymmetric Veda's theorem", so that students can learn to think, and then summarize the general problem-solving strategies for solving such constant establishment problems.

Keywords: "Symmetry Veda's theorem" structure; Structure of "Asymmetric Veda's Theorem"; Product and mutualization; Local operations; Overall approximation

圆锥曲线中的定点、定值问题是各地模考、高考命题的热点，这类问题灵活多变，有时思路正确，却因为运算复杂导致出错，究其原因，运算出错并非偶然，不能只是死算，要讲究算理。最近遇到一类解析几何化简中韦达定理不好直接使用的“非对称韦达定理”结构。

为了说明白什么是“非对称韦达定理”结构？我们先来说说什么是“对称韦达定理”结构，形如

$x_1+x_2, x_1x_2, x_1^2+x_2^2, |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}, \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

等，这些结构呈现出 x_1,x_2 是成对出现，它们的系数比是 $1:1$ 的，表达式里面的下标互换后结果不变，即 x_1 和 x_2 地位等同，这类问题化简时基本可以直接使用韦达定理化简；而“非对称韦达定理”结构是形如

$x_1-2x_2, 2x_1+3x_2$，$\frac{ty_1y_2+y_1}{ty_1y_2+y_2}$，$\frac{x_1x_2+x_1-2x_2}{x_1x_2+2x_1+x_2}$

等，这些结构呈现出 x_1,x_2 不是成对出现，它们的系数比不是 $1:1$ 的，表达式里面的下标互换后结果变了，即 x_1 和 x_2 地位不等同，这类问题化简时不可以直接使用韦达定理。面对这类“非对称韦达定理”结构化简，我们该如何处理呢？又为什么会出现这种情况呢？这里想借此文针对计算过程中出现“非对称韦达定理”结构的运算技巧探究”做初步探究，以期抛砖引玉。

例 1（2022 南通零模第 20 题第（2）问）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，四点 $M_1\left(4,\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$M_2(3,\sqrt{2})$，$M_3\left(-2,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$M_4\left(2,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$中恰有三点在 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $(3,0)$ 的直线 l 交 C 于 P,Q 两点，过点 P 作直线 $x=1$ 的垂线，垂足为 A.证明：直线 AQ 过

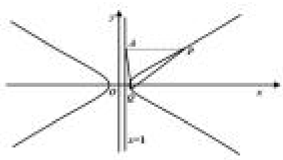
作者简介：徐春艳，女，1983 年 3 月生，汉，江苏省镇江人，本科，高级教师，镇江市第六批 169 技术骨干，镇江市第八批骨干教师，研究方向：中学数学教育。

ISSN: 2705-0408(Print); 2705-0416(Online)

定点.

分析：(1) 双曲线 C 的方程为：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)目标是求证直线 AQ 过定点，故首先应该求直线 AQ 方程，再由图形的对称性得知定点在 x 轴上，故在直线中令 $y=0$，探求 x 的值即可。



方向一：设直线的横截式

当 PQ 斜率不为 0 时，可设直线 PQ 方程为 $x=my+3$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $A(1,y_1)$

$$\begin{cases}x=my+3\\x^2-3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(m^2-3)y^2+6my+6=0,\Delta>0$$

，直线 AQ 的方程为

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-1}(x-1)+y_1=\frac{y_2-y_1}{my_2+2}(x-1)+y_1$$

，易知定点在 x 轴上，$y=0\Rightarrow x=\frac{-y_1(my_2+2)}{y_2-y_1}+1$

$$=\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}+1$$

因为 x 是定值，那么 $\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}$ 就是定值。

于是问题就转化为：已知 $y_1+y_2=\frac{-6m}{m^2-3},y_1y_2=\frac{6}{m^2-3}$ 时，如何去求 $\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}$？我们该如何处理这样的“不对称韦达定理”结构？

法一：利用求根公式把 y_1,y_2 用 m 表示带入化简。从方程角度看，两个方程有三个未知数 y_1,y_2,m，得到比值比较困难，所以利用消元的思想利用 m 表示 y_1 和 y_2 代入，虽然过程繁一点，但还是可以算的。

由方程 $(m^2-3)y^2+6my+6=0,\Delta>0$ 得到

$$y_1=\frac{-6m+\sqrt{12m^2+72}}{2(m^2-3)}$$

$y_2=\frac{-6m-\sqrt{12m^2+72}}{2(m^2-3)}$，代入 $\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}$：

$$\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}=\frac{\frac{-6m}{2(m^2-3)}+2\times\frac{-6m-\sqrt{12m^2+72}}{2(m^2-3)}}{\frac{-6m-\sqrt{12m^2+72}}{2(m^2-3)}-\frac{-6m+\sqrt{12m^2+72}}{2(m^2-3)}}$$

$$=\frac{-\sqrt{12m^2+72}}{-\sqrt{12m^2+72}}=1$$

故 $x=2$，直线 PQ 过 $(2,0)$，且直线 PQ 斜率为 0 时也满足直线 PQ 过 $(2,0)$。

法二：找到 y_1+y_2 与 y_1y_2 关系，化积为和

既然结论是定值，所以分子分母一定可以约分，考虑到分子分母中是一次项为主，故考虑将 y_1y_2 用 y_1 和 y_2 表示，化齐次式，首先想到的是韦达定理，观察根与系数关系，发现 $my_1y_2=-y_1-y_2$，故

$$\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}=\frac{-y_1-y_2+2y_1}{y_1-y_2}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_2}=1,$$

下同法一。

法三：“凑” y_1+y_2，“消” y_1 或 y_2。通过构造转化为对称的韦达定理结构，统一一次项的下标，局部运算，

整体约分。

$$\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}=\frac{my_1y_2+2y_1}{-(y_2+y_1)+2y_1}=\frac{\frac{6m}{m^2-3}+2y_1}{\frac{6m}{m^2-3}+2y_1}=1。$$

法四：猜到定值，再证明。此法建立在法三的基础上，通过“凑” y_1+y_2，“消”去 y_1 或 y_2 后，观察分子分母里面一次项的系数比猜到定值是“1”，接下来等价于探求 $\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}-1=0$。配凑常数的优点是通分后 y_1,y_2 系数比调成了 $1:1$，直接可以用韦达定理，避免了中间的大量的运算，也不需要太多运算技巧。

$$\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}-1=\frac{my_1y_2+2y_2-(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=\frac{my_1y_2+y_1+y_2}{y_1-y_2}$$

代入根与系数的关系：

$$y_1+y_2=\frac{-6m}{m^2-3},y_1y_2=\frac{6}{m^2-3},$$

则 $\frac{my_1y_2+y_1+y_2}{y_1-y_2}=\frac{\frac{6m}{m^3-3}-\frac{6m}{m^3-3}}{y_1-y_2}=0$

即 $\frac{my_1y_2+2y_1}{y_1-y_2}=1$。

方向二：设直线的斜截式

分析：当 PQ 斜率存在时，设 $PQ:y=k(x-3)$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $A(1,y_1)$

$$\begin{cases}y=k(x-3)\\x^2-3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3k^2-1)x^2-18k^2x+27k^2+3=0,\Delta>0,$$

则 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2-1},x_1x_2=\frac{27k^2+3}{3k^2-1}$，

直线 AQ：$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-1}(x-1)+y_1$，由图形对称性易知定点在 x 轴上，

令

$$y=0\Rightarrow x-1=\frac{-y_1(x_2-1)}{y_2-y_1}=\frac{-k(x_1-3)(x_2-1)}{k(x_2-x_1)}$$

即：$x-1=\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}=?$

问题就转化为：已知

$x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2-1},x_1x_2=\frac{27k^2+3}{3k^2-1}$，如何求

$\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}$?

法一：利用求根公式把 x_1,x_2 用 k 表示带入化简。和方向一的法一一样，这里不再赘述。

法二：找到 x_1+x_2 与 x_1x_2 关系，化积为和。但是这里 x_1+x_2 与 x_1x_2 关系不如前面 y_1+y_2 与 y_1y_2 关系明显，我们该如何去找?

角度 1：待定系数

设 $x_1x_2=m(x_1+x_2)+n$，即

$$\frac{27k^2+3}{3k^2-1}=\frac{18mk^2}{3k^2-1}+n,$$

即 $27k^2+3=(18m+3n)k^2-n$，

即 $\begin{cases}18m+3n=27\\-n=3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=2\\n=-3\end{cases}$，故

$$x_1x_2=2(x_1+x_2)-3,$$

角度 2：分离常数后观察

$$x_1x_2=\frac{27k^2+3}{3k^2-1}=9+\frac{12}{3k^2-1}$$

，$x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2-1}=6+\frac{6}{3k^2-1}$，

故 $x_1x_2-9=\frac{12}{3k^2-1},x_1+x_2-6=\frac{6}{3k^2-1}$，

则 $\frac{x_1x_2-9}{(x_1+x_2)-6}=2$，即 $x_1x_2=2(x_1+x_2)-3$

故

$$\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}=\frac{-2(x_1+x_2)+3+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=$$

。

即 $x=\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}+1=2$，故直线 PQ 过 $(2,0)$；

若直线 PQ 斜率不存在，可以验证也满足直线 PQ 过 $(2,0)$。

法三：凑 x_1+x_2，消 x_1 或 x_2，顺带消常数项。

$$\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}=\frac{-x_1x_2+3(x_1+x_2)-3-2x_1}{(x_1+x_2)-2x_1}$$

$$=\frac{-\frac{27k^2+3}{3k^2-1}+\frac{54k^2}{3k^2-1}-3-2x_1}{\frac{18k^2}{3k^2-1}-2x_1}=\frac{\frac{18k^2}{3k^2-1}-2x_1}{\frac{18k^2}{3k^2-1}-2x_1}=1$$

下同法二。

法四：猜到定值，再证明。由法三分子、分母中一次项 x_1 的系数比猜想定值是“1”，故只要验证 $\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}-1=0$ 即可。

$$\frac{-x_1x_2+x_1+3x_2-3}{x_2-x_1}-1=\frac{-x_1x_2+2x_1+2x_2-3}{x_2-x_1}$$

，下面代入韦达定理计算即可。

再举一例以巩固对“不对称韦达定理”结构的处理方法：

例 2（2022 泰州高三期末统考 21 题第（2）问）已知 B,C 分别是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点，直线 l 过点 $P(1,0)$ 且与双曲线交于 M,N 两点，BM 与 CN 交于点 Q，证明：$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值.

分析：设 $Q(x_0,y_0)$，易得 $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP}=x_0$，故只要验证 x_0 是定值即可。

解：设 $l:x=my+1$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ x=my+1\end{cases}$ 即 $(m^2-4)y^2+2my-3=0$

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则

$y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2-4},y_1y_2=\frac{-3}{m^2-4}$，

由 $BM:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

$CN:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

消 y 得：$\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1}$

要证：$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP}$ 是定值

而 $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP}=x_Q$

即证：x_Q 是定值

即证：$\frac{x+2}{x-2}$ 是定值

即证：$\frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1}$ 是定值

法一：找到 y_1+y_2 与 y_1y_2 关系，化积为和

$y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2-4}, y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2-4}$，故

$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$

$$\frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1}=\frac{(my_1+3)y_2}{(my_2-1)y_1}=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}=3$$

即 $\dfrac{x+2}{x-2}=3$，故 $x=4$ 即 $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP}=4$

法二："凑" y_1+y_2，"消" y_1 或 y_2。

$$\frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1}=\frac{(my_1+3)y_2}{(my_2-1)y_1}=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}=\frac{my_1y_2+3(y_2+y_1)-3y}{my_1y_2-y_1}$$

$$=\frac{\frac{-3m}{m^2-4}+\frac{-6m}{m^2-4}-3y_1}{\frac{-3m}{m^2-4}-y_1}=\frac{\frac{-9m}{m^2-4}-3y_1}{\frac{-3m}{m^2-4}-y_1}=3,$$

下同法一

法三：凑常数，变证明

$$\frac{(x_1+2)y_2}{(x_2-2)y_1}-3=\frac{(my_1+3)y_2}{(my_2-1)y_1}-3=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}-3=\frac{-2my_1y_2+3(y_2+y_1)}{my_1y_2-y_1}=0$$

下同法一。

结束语：

在圆锥曲线定点定值问题中，非对称韦达定理常用处理方法有：（1）利用求根公式代入，此方法有点繁琐，慎用；（2）找到 x_1x_2 和 x_1+x_2 的关系，化积为和；（3）把 x_1 或 x_2 用 x_1+x_2 表示，在 ax_1+bx_2 中凑"x_1+x_2"即：$ax_1+bx_2=a(x_1+x_2)+(b-a)x_2$ 或 $ax_1+bx_2=b(x_1+x_2)+(a-b)x_1$；（4）先猜再证，把求解变成结论的证明。总的说来就是"局部运算、整体约分"。以上这些技巧方法可操作性强，运算上得到了很大简化，过程精准高效，化简目标明确，有助于学生提升数学运算核心素养，通过一题多解、讲练结合，有助于学生更有获得感。

巩固练习：

1.（2020 北京高考题改编）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，椭圆上点 $A(-2，-1)$，过点 $B(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆于点 M,N，直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q，求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

2.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A,B，过点 $(\dfrac{3}{2},0)$ 的直线交椭圆 C 于 C,D 两点，直线 AC 与 BD 相交于点 P.求证：点 P 在定直线上。

3.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A,B，过右焦点 F 的直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点（点 P 在 x 轴上方）.

若 $QF=2FP$，求直线 l 的方程；

设直线 AP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2，是否存在常数 λ，使得 $k_1=\lambda k_2$？

4.已知 A,B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的上下顶点，直线 l 过点 $T(0,1)$ 且与椭圆交于 M,N 两点，AM 与 BN 交于点 P，证明：$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值.

答案：1.1；2.$x=6$；3.（1）$\sqrt{5}x-2y-\sqrt{5}=0$；（2）$\lambda=\dfrac{1}{3}$；4.2

ISSN: 2705–0408(Print); 2705–0416(Online)

参考文献：

[1] 马海燕.浅谈非对称韦达定理的处理方式--以“2020 年全国卷Ⅰ理科 20 题圆锥曲线”为例[J].数理天地(高中版),2022(08):8-9.

[2] 王冬明.用韦达定理求解非对称式的常用策略[J].高中数学教与学,2019(15):4-6.

[3] 涂序星.非对称结构圆锥曲线问题的求解策略--以 2020 年高考全国Ⅰ卷第 20 题为例[J].高中数学教与学,2020(17):11-13.