基于“理解学生”角度发展数学核心素养，打造高中数学高质量习题课堂

——以“一道椭圆离心率的测试题评讲”为例

郭晓俊

重庆市育才中学校　400050

Developing Mathematics Core Literacy from the Perspective of “Understanding Students” and Creating High School Mathematics High Quality Exercise Classrooms

—Taking “Evaluation of a Test Question on Eccentricity of an Ellipse” as an Example

Guo Xiaojun

Chongqing Yucai Middle School 400050

《普通高中数学课程标准》指出：“数学教育帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法。数学素养是现代社会每一个人应该具备的一种基本素养。”由此可见，发展学生的数学核心素养是高中数学教育所承担的重大使命。

立足发展学生数学核心素养的高中数学高质量课堂是作为一线教师每天都在探究的课题。章建跃先生认为而落实数学学科核心素养的关键在“四个理解 —— 理解数学、理解学生、理解教学，理解技术”。“四个理解”是提高提高数学课堂教学质量和效益的决定性因素，也是有效提升学生数学学科素养的必备条件。

“理解数学〞是解决“教什么〞的问题，“理解学生〞是解决“怎么教〞的问题，“理解教学〞是解决“为什么这样教〞的问题，“理解技术”是解决“如何利用技术教”的问题。四者兼顾，最终才能到达课堂教学的高质量和提高学生综合能力的效果。我认为数学高质量课堂，其他三个理解都可以围绕“理解学生”进行理解，找到他们之间的关系，一切以理解学生为出发点，以生为本，以学定教，以师助推。在当下教师解决了“教什么”“为什么这样教”“如何利用技术教”这些问题后，“怎么教〞显得尤为最要，是现在的关键，因为只有学生掌真正掌握了数学知识，才算发展了核心素养，离开数学知识的理解和应用，核心素养的发展将成为空中楼阁，虚无缥缈，将会显得苍白无力。

一堂好的习题课教学，不应该是老师在讲台上自编自导自演，不应该是老师在讲台上向学生灌输自认为的最优解或是最巧妙的解法，而应该立足发展提升学生的数学核心素养角度去充分“理解学生”，尊重并理解学生是一个个有着自己思维认知的独立个体，站在学生的角度去想 —— 面对这道题，学生会怎么想？学生已经具备的认知基础有哪些？达成教学目标所需具备的认知基础有哪些？“已有的基础”和“需要的的基础”之间又怎样的差距？哪些差距可以由学生通过努力在课堂上经过思考或彼此间的思维碰撞进行弥补？哪些差距需要在老师的启发和引导下进行弥补？学生怎样找到解决问题的突破口？他们会从哪些数学角度切入？会运用哪些数学方法或数学思想去解决这道题？

罗曾儒教授指出：一个数学问题，如果我们只有一种解法，不管是自己想出来的还是翻答案看到的，都肯定会存在认知上的局限性。只有在得到两个或更多解法后，才会对问题的实质有真正的理解，通过解题而培养能力的目的才有可能实现。

本文便是评讲完一次考试试卷后从“理解学生”的思维规律和认知特点后的一些思考。

一、测试题及背景介绍

已知 F_1，F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则椭圆与双曲线的离心率的倒数之和的最大值为(　　)

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 3　　D. 2

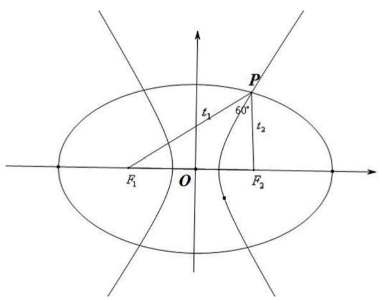
这是高三上学期，在第一轮复习的重要内容基本完成的情况下，进行的一次周考，这是选择题的最后一题，第 12 题，也是选择题中的压轴题。从改卷结果看，做的并不是很理想，少数的同学能选对，当然里面还包括运气好，蒙对的同学。在上课评讲时，少数同学思路清晰，运算准确，能得到正确答案；一部分同学能将题目翻译正确，但在求最值时找不到解题方向，思维局限，不能建立知识间的联系；一部

分同学能找到解题的方向和思路，但是运算能力和素养不过关，没有得到最终结果；一部分同学根本不敢碰12题，心理上胆怯，觉得自己做不出来。通过这些对学生试卷的分析和对学生的“理解”，老师决定让学生从数学的不同层面，运用知识的迁移，真的做到灵活应用，融会贯通，让课堂百花齐放百家争鸣。

二、不同的思路及解法

审题分析1：欲求离心率，需利用椭双的定义和性质，将相应的条件进行翻译，再找彼此间的联系，建立不等式才可求最值.

先来翻译基本条件，将条件代数化，不妨设椭圆和双曲线的焦点都在 x 轴上，因为共焦点，设椭圆：$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$，离心率为 $e_1=\frac{c}{a_1}$



双曲线：$\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,\ b_2>0)$，离心率为 $e_2=\frac{c}{a_2}$

∴ 椭圆：a_1，b_1，c，e_1，双曲线：a_2，b_2，c，e_2

求解的问题的是 $\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}$.

交汇审题信息后，我们会考虑两种思路：一种是自然而然找到的 $\frac{1}{e_1}$，$\frac{1}{e_2}$ 内在联系，再运用所学过的知识点灵活应用求最值，解法(一)—解法(四)；另一种是直接将 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$ 表达出来，运用正余弦定理和函数思想求最值，解法(五)—解法(六)。解法(七)是学生利用补充知识也即大学知识中的柯西不等式来求的最值，非常棒！

解法(一)：借助参数方程的思想和换元法：

学生1：由椭双焦点三角形中的焦半径定义及余弦定理，得

∵ P 在椭圆上，$t_1+t_2=2a_1$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{t_1^2+t_2^2-4c^2}{2t_1t_2}=\frac{1}{2}$，$t_1t_2=\frac{4}{3}b_1^2$. ①

∵ P 在双曲线上，$t_1-t_2=2a_2$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{t_1^2+t_2^2-4c^2}{2t_1t_2}=\frac{1}{2}$，$t_1t_2=4b_2^2$. ②

由①②得 $b_1^2=3b_2^2$

$a_1^2-c^2=3(c^2-a_2^2)$，$a_1^2+3a_2^2=4c^2$，$\frac{a_1^2}{c^2}+\frac{3a_2^2}{c^2}=4$，$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$.

或由椭双焦点三角形面积结论公式，得

$S_{\Delta PF_1F_2}=b_1^2\tan\frac{\pi}{6}=b_2^2 cot\frac{\pi}{6}$，$b_1^2=3b_2^2$，$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$.

老师点评：这一部分的运算，大部分学生都可以想到并做到，难点是接下来怎样通过 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$ 求得 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$ 的最大值.

解决该问题，我们可以跳出解析几何的限制，打破章节局限，站在更高维度来看问题，综合我们所学的数学章节的所有知识，从不同角度来看问题，做到知识的融会贯通，灵活应用。

学生2：可以借助参数方程的思想和换元法：

∵ $\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，∴ $\frac{1}{4e_1^2}+\frac{1}{\frac{4e_2^2}{3}}=1$.

设 $\frac{1}{e_1}=x>0$，$\frac{1}{e_2}=y>0$，则原式即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$.

设 $x=2\cos\alpha$，$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$，$\alpha$ 为参数，∵ $x>0$，$y>0$，∴ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

∴ $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=2\cos\alpha+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，

∵ $\alpha\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $\alpha+\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)_{\max}=1$，

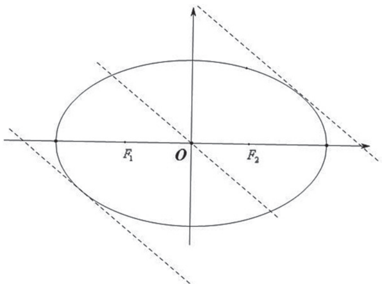
$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

学生2点评：换元(x，y)的目的是为了转换成我们所熟悉的字母表达式，符合我们的习惯，回到我们经常练习的领域，思维会更灵敏，甚至会达到条件反射的境地。接下来用参数方程的思想和三角函数中辅助角公式求最值即可。

老师点评：非常好！看到平方，划归到我们熟悉的领域，进行求解。说明参数方程学的炉火纯青，非常透彻，才能在一团迷雾中找到解决问题的方向。

解法(二)：线性规划的思想

学生3：根据学生2的思路，将解析几何和参数方程联系在了一起，我在想可不可以和线性规划的思想联系在一起呢？试一试。



由学生2知，设$\frac{1}{e_1}=x>0$，$\frac{1}{e_2}=y>0$，则原式即$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$.

转化为求$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=x+y$的最大值.

令$z=x+y$，$y=-x+z(x>0, y>0)$，z.

由图知，相切时$b=z$最大.

联立$\begin{cases} y=-x+z \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1 \end{cases}$

$\therefore 4x^2-6zx+3z^2-4=0$，$\Delta=36z^2-16(3z^2-4)=0$，$z=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$z_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

老师点评：很好！计算量变小了，更快更准！你是怎么想到的？

学生3：因为用我们所熟悉和习惯的x，y换元后，马上想到线性规划中常讲通过$x+y$的几何意义来求其最值。

老师点评：非常好！“化归思想”非常好，所以划归到熟悉领域是非常必要的。

解法(三)：函数思想和均值不等式

学生4：还可以利用函数思想和均值不等式

由上知$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，得$\frac{1}{e_1^2}=4-\frac{3}{e_2^2}$，$\therefore \frac{1}{e_1}=\sqrt{4-\frac{3}{e_2^2}}=\sqrt{\frac{4e_2^2-3}{e_2^2}}=\frac{\sqrt{4e_2^2-3}}{e_2}$,

$\therefore\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}+2\frac{1}{e_1}\cdot\frac{1}{e_2}=4-\frac{3}{e_2^2}+\frac{1}{e_2^2}+2\frac{\sqrt{4e_2^2-3}}{e_2}\cdot\frac{1}{e_2}=4-\frac{2}{e_2^2}+2\frac{\sqrt{4e_2^2-3}}{e_2^2}$

令$\sqrt{4e_2^2-3}=t$，$\because e_2>1$，$\therefore t>1$，$\therefore e_2^2=\frac{t^2+3}{4}$，$\therefore \frac{1}{e_2^2}=\frac{4}{t^2+3}$

$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}+2\frac{1}{e_1}\cdot\frac{1}{e_2}=4-\frac{3}{t^2+3}+\frac{8t}{t^2+3}=4+\frac{8(t-1)}{t^2+3}=4+\frac{8(t-1)}{(t-1)^2+2(t-1)+4}=4+\frac{8}{(t-1)+\frac{4}{t-1}+2}4+\frac{8}{2\sqrt{4}+2}=\frac{16}{3}$(当且仅当$t-1=\frac{4}{t-1}$即$t=3$时取等号)

$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

学生4点评：将$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$中的两个变量消元，变形成只有一个变量的表达式，再利用函数思想求最值，最后发现均值不等式一步就可求出来.

老师点评：可见找到解决问题的方向还是很重要的，其次就是要勇敢往下算，计算也要小心谨慎。

解法(四)：利用函数思想，运用导函数求单调性的方法求最值

学生5：和学生4一样，利用函数思想求最值，可以直接将$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$表达出来，再运用导函数求单调性的方法求最值，只是这里面的计算量很大，且容易算错，只算了一半就没有勇气往下算了，只提供思路。

老师点评：思路也非常棒，导函数法求最值是我们的杀手锏。这不是考场，所以我们可以尝试一下，至少知道道路虽然坎坷，但一定可以成功，既锻炼了我们的计算能力，也给我们增加了勇气！

$\therefore \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{a_1}{c}+\frac{a_2}{c}=\frac{a_1+a_2}{c}$，$\therefore\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2}{c^2}$

由上学生1知，又$\because b_1{}^2=3b_2{}^2$，$\therefore a_1{}^2-c^2=3(c^2-a_2{}^2)$，$\therefore 4c^2=a_1{}^2+3a_2{}^2$，$\therefore c^2=\frac{1}{4}(a_1{}^2+3a_2{}^2)$

$\therefore\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2}{c^2}=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2}{\frac{1}{4}(a_1{}^2+3a_2{}^2)}=\frac{4\left(1+\frac{a_2{}^2}{a_1{}^2}+2\frac{a_2}{a_1}\right)}{1+3\frac{a_2{}^2}{a_1{}^2}}$

令$\frac{a_2}{a_1}=t$，$\because a_1>c>a_2>0$，$\therefore 1>\frac{a_2}{a_1}>0$，$\therefore 1>t>0$，

$\therefore\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{4(1+t^2+2t)}{1+3t^2}$,

令$f(t)=\frac{4(1+t^2+2t)}{1+3t^2}$

$\therefore f'(t)=\frac{-2(3t-1)(t+1)}{(1+3t^2)^2}$

令$f'(t)=0$，解得$t=-1$(舍)或$t=\frac{1}{3}$，且判断出$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$单增，在$\left(\frac{1}{3},1\right)$单减，

$\therefore f(t)_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}$，$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

审题分析2：直接将$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$表达出来，回避前面几种方法中先得出$\frac{1}{e_1}$，$\frac{1}{e_2}$之间的关系，直接运用正弦定理、余弦定理进行转化.

解法(五)：运用正弦定理进行转化，再利用三角函数求最值

学生6：直接将$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$表达出来，回避前面几种方法中先得出$\frac{1}{e_1}$，$\frac{1}{e_2}$之间的关系，直接运用正弦定理进行转化，再利用三角函数求最值，

$\because \begin{cases}t_1+t_2=2a_1\\t_1-t_2=2a_2\end{cases}\therefore\begin{cases}t_1=a_1+a_2\\t_2=a_1-a_2\end{cases}\therefore \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{a_1}{c}+\frac{a_2}{c}=\frac{a_1+a_2}{c}=\frac{t_1}{c}$

在$\triangle PF_1F_2$中，由正弦定理得，$\frac{2c}{\sin 60^\circ}=\frac{t_1}{\sin\alpha}$，$\therefore t_1=\frac{4c}{\sqrt{3}}\sin\alpha$

$\therefore \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{4\sin\alpha}{\sqrt{3}c}$

$\therefore \sin\alpha=1$即$\alpha=90^\circ$即$PF_2\perp x$轴时，$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

老师点评：直接转化，利用椭双定义和焦半径的关系，很好。你是怎么想到的？

学生6：受一道高考题的启发，那里面在焦点三角形中用到了正弦定理。高考题如下：

(2009. 重庆. 文)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若椭圆上存在一点$P$使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin PF_2F_1}=\frac{a}{c}$，则该椭圆的离心率的取值范围是$\underline{(\sqrt{2}-1,1)}$.

(2009·重庆·理)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若双曲线上存在一点$P$使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin PF_2F_1}=\frac{a}{c}$，则该双曲线的离心率的取值范围是$\underline{(1,\sqrt{2}+1)}$.

老师点评：点赞！看来多复习消化做过并讲过的题，多揣摩感悟学到的方法是解决难题的一条捷径。

解法(六)：余弦定理加函数思想

学生7：和学生6有相似之处，直接将$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$表达出来，回避前面几种方法中先得出$\frac{1}{e_1}$，$\frac{1}{e_2}$之间的关系，直接运用余弦定理进行转化，再利用函数思想求最值。

由学生6得$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{t_1^2}{c^2}$，，又在$\Delta PF_1F_2$中，由余弦定理得$\cos 60^\circ=\frac{t_1^2+t_2^2-4c^2}{2t_1t_2}=\frac{1}{2}$

$\therefore t_1^2+t_2^2-4c^2=t_1t_2$，$\therefore 4c^2=t_1^2+t_2^2-t_1t_2$

$\therefore \left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2=\frac{t_1^2}{c^2}=\frac{4t_1^2}{4c^2}=\frac{4t_1^2}{t_1^2+t_2^2-t_1t_2}=\frac{4}{1+\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2-\frac{t_2}{t_1}}$

令$\frac{t_2}{t_1}=m\in(0,1)$，$(t_1>t_2>0)$，$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2_{\max}=\frac{4}{1+m^2-m}$，

$\therefore m=\frac{1}{2}$时$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2_{\max}=\frac{4}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}$，$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

老师点评：记住一些常用方法和结论也是解题的一大窍门。

审题分析3：利用柯西不等式，简单粗暴。

解法(七)：柯西不等式

柯西不等式：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$(当且仅当$ad=bc$即$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$时取等号)

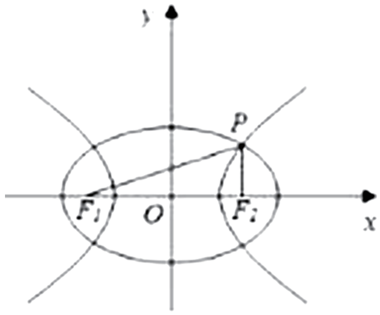
$\because \frac{1}{e_1^{\ 2}}+\frac{3}{e_2^{\ 2}}=4$，$\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{e_1}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{e_2}\right)^2\right]\geqslant\left(1\cdot\frac{1}{e_1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{e_2}\right)^2$(当且仅当$\frac{\sqrt{3}}{e_2}=\frac{1}{\sqrt{3}e_1}$时取等号)

即$\left[1+\frac{1}{3}\right]\left[\frac{1}{e_1^{\ 2}}+\frac{3}{e_2^{\ 2}}\right]\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2$，即$\frac{4}{3}\cdot 4\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2$，即$\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$，

$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

老师点评：是学生利用补充知识也即大学知识中的柯西不等式来求的最值，非常棒！

三、问题的变式



变式1 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$具有相同焦点$F_1$，$F_2$，且在第一象限交于点$P$，椭圆与双曲线的离心率分别为$e_1$，$e_2$，若$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则$e_1{}^2+e_2{}^2$的最小值是（ A ）

A. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ B. $2+\sqrt{3}$ C. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

解析：根据题意，

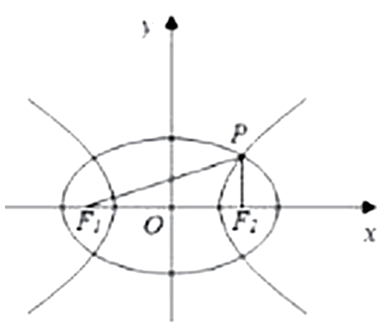
可知$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|PF_1|-|PF_2|=2m$，$\therefore|PF_1|=a+m$，$|PF_2|=a-m$，

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理，$(2c)^2=(a+m)^2+(a-m)^2-2(a+m)(a-m)\cos60^\circ$，$c^2=\frac{a^2+3m^2}{4}$，

$$e_1{}^2+e_2{}^2=\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{m^2}=\frac{a^2+3m^2}{4a^2}+\frac{a^2+3m^2}{4m^2}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{3m^2}{a^2}+\frac{a^2}{m^2}\right)\geqslant1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

当且仅当$\frac{3m^2}{a^2}=\frac{a^2}{m^2}$时取等号.

老师点评：该题考查的是有关椭圆和双曲线的离心率的问题，涉及到的知识点有椭圆和双曲线的定义，余弦定理，椭圆和双曲线的离心率，基本不等式求最小值的问题，正确理解知识点是正确解题的关键.



变式2 已知F_1，F_2是椭圆和双曲线的公共焦点，P是它们的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为$e_1$，$e_2$，则$\frac{1}{e_1e_2}$的最大值是（ D ）

A. 3 B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：如图，设椭圆的长半轴长为a_1，双曲线的半实轴长为a_2，

则根据椭圆及双曲线的定义$|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，$|PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，

在ΔPF_1F_2中，由余弦定理，$(2c)^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos60^\circ$，$4c^2=a_1{}^2+3a_2{}^2$，

$\therefore\frac{1}{e_1{}^2}+\frac{3}{e_2{}^2}=4$，$\therefore\frac{1}{e_1{}^2}+\frac{3}{e_2{}^2}=4\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$，$\therefore\frac{1}{e_1e_2}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当$\frac{1}{e_1{}^2}=\frac{3}{e_2{}^2}=2$时取等号.

老师点评：本题考查圆锥曲线的共同特征，考查通过椭圆与双曲线的定义以及椭圆与双曲线的离心率，属于难题.离心率的求解在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点，一般求离心率有以下几种情况：① 直接求出a，c，从而求出e；② 构造a，c的齐次式，求出e；③ 采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解.

四、教学启示

（一）摒弃急功近利的课堂教学，从“理解学生”的角度让学生学会举一反三、触类旁通，发展数学核心素养，打造高质量习题课堂

在现在这种应试教育及高考压力下，作为老师，我们多少显得有些急功近利，如果急功近利，学生看解答而不做题，只听而没有经过思考，没有切身体验，快速直接地得到解决问题的方法，正如章建跃教授所说，结果肯定是“讲过练过的不一定会，没讲没练的肯定不会”。只有站在“理解学生”的角度，让学生学会回顾、反思，经常实践，学会独立思考，时刻把“举一反三”、“触类旁通”放在心上，才能使他们掌握在考场上取胜的法宝。

（二）反思课堂教学，提升学生数学核心素养教出让自己崇拜的学生

如果要提升学生数学核心素养，就要做到章建跃和罗曾儒两位教授所说的教学境界，作为老师，我们必须明确不是为了解题而解题，而是为了提炼数学思维，提升数学素养。通过这节课，我们发现一道“好题”暗含很多思维，能调动学生的思维碰撞，甚至激发学生的积极性，这样的讲题方式就算达到比较高的境界。课后，我们要做到一是反思上课一定要给学生思考的时间，给学生分享想法的机会，鼓励学生大胆说出自己的想法，说错也没什么。二是发现学生上课临时想出来的方法非常棒，思想得到调动，思维非常活跃，甚至想出了老师没有想到的方法，真的是个很大的惊喜！这就是老生常谈的青出于蓝而胜于蓝，也是人民教育家陶行知先生说的“教育的最高境界是培养出让自己崇拜的学生！”