利用隐函数法求解幂指函数的导数问题

邓嘉颖　殷政伟

长沙师范学院　湖南　长沙　410100

摘　要： 幂指函数是指幂底部和幂指数部分均含有自变量的函数，既像幂函数，又像指数函数，二者的特点兼而有之。幂指函数的导数问题是微积分中的一个重要内容，也是高等数学学习中的一个难点。本文主要介绍利用隐函数法求解幂指函数的导数问题的原理和方法，给出了一元幂指函数高阶导数的通用公式，以及多元幂指函数的高阶偏导数的计算方法，并通过具体实例进行验证和分析。本文的研究对于深入理解幂指函数的性质和规律，提高数学思维和运算能力，具有一定的理论和实践意义。

关键词： 幂指函数；隐函数法；高阶导数；偏导数

Using Implicit Function Method to Solve the Derivative Problem of Power Exponential Functions

Deng Jiaying　Yin Zhengwei

Changsha Normal University Hunan Changsha 410100

Abstract: A power exponential function refers to a function that contains independent variables at both the bottom and part of the power exponent. It is both like a power function and an exponential function, and both have their own characteristics. The derivative problem of power exponential functions is an important part of calculus and a difficult point in higher mathematics learning. This article mainly introduces the principle and method of using the implicit function method to solve the derivative problem of power exponential functions. It provides a universal formula for high-order derivatives of univariate multiple power exponential functions and a calculation method for high-order partial derivatives of multiple power exponential functions. It is verified and analyzed through specific examples. The research in this article has certain theoretical and practical significance for deepening the understanding of the properties and laws of power exponential functions, improving mathematical thinking and operational abilities.

Keywords: power-law function; Implicit function method; Higher derivative; partial derivative

一、引言

幂指函数是指幂底部和幂指数部分均含有自变量的函数，其一般形式为：$y=f(x)^{g(x)}$，其中$f(x)$和$g(x)$都是关于x的可导函数，且$f(x)>0$。幂指函数在数学、物理、化学、工程等领域中都有广泛的应用[1]，例如，某些生物种群的增长模型、放射性物质的衰变规律、化学反应的速率方程等，都可以用幂指函数来描述。

求解幂指函数导数是微积分中的难点之一。针对这一问题，常见的方法包括指数求导法、对数求导法和隐函数法。尽管指数和对数法简单易懂，但处理高阶导数或多元幂指函数的偏导数时略显繁琐[2-4]。相比之下，隐函数法无需进行函数转化，直接在幂指函数基础上求导，具有通用性和高效性。本文详细介绍了利用隐函数法解决幂指函数导数问题的原理和方法，给出了一元幂指函数高阶导数的通用公式，以及多元幂指函数高阶偏导数的计算方法，并通过实例验证和分析。这一研究对深入理解幂指函数性质、提高数学思维和运算能力具有重要的理论和实践意义。

二、隐函数法的原理

隐函数法是一种直接在幂指函数的基础上求导的方法，不需要进行函数的转化，只需要利用隐函数的求导法则，即可求出幂指函数的任意阶导数或偏导数。隐函数法的原理是将幂指函数视为一个隐函数，即$y=f(x)^{g(x)}$可以看作是$F(x,y)=f(x)^{g(x)}-y=0$，然后对该隐函数的两边同时求导，得到隐函数的一阶导数或偏导数的关系式，再根据隐函数的一阶导数或偏导数的值，求出幂指函数的一阶导数或偏导数。同理，对隐函数的一阶导数或偏导数的关系式再次求导，得到隐函数的二阶导数或偏导数的关系式，再根据隐函数的二阶导数或偏导数的值，求出幂指函数的二阶导数或偏导数。以此类推，可以求出幂指函数的任意阶导数或偏导数。

三、隐函数法的具体过程

（一）一元幂指函数的高阶导数

一元一重幂指函数是指形如$y=f_1(x)^{f_2(x)}$的函数，其中$f_1(x)$，$f_2(x)$都是关于x的可导函数，且$f_1(x)>0$。利用隐函数法求解一元多重幂指函数的高阶导数的步骤如下：

（1）将一元一重幂指函数视为一个隐函数，即$y=f_1(x)^{f_2(x)}$可以看作是$F(x,y)=f_1(x)^{f_2(x)}-y=0$。

（2）对隐函数的两边同时求x的导数，得到隐函数的一阶导数的关系式，即

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

其中$\frac{\partial F}{\partial x}=f_2(x)f_1(x)^{f_2(x)-1}f_1'(x)+f_1(x)^{f_2(x)}f_2'(x)\ln f_1(x)$，$\frac{\partial F}{\partial y}=-1$.

(3) 根据隐函数的一阶导数的关系式，求出隐函数的一阶导数的值，即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=f_2(x)f_1(x)^{f_2(x)-1}f_1'(x)+f_1(x)^{f_2(x)}f_2'(x)\ln f_1(x). \quad (1)$$

(4) 对隐函数的一阶导数的关系式再次求 x 的导数，得到隐函数的二阶导数的关系式，即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y}y''+y'(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2})=0$$

(5) 根据隐函数的二阶导数的关系式，求出隐函数的二阶导数的值，即

$$y''=-\frac{F_{xx}''F_y'^2-2F_{xy}''F_x'F_y'+F_{yy}''F_x'^2}{F_y'^3} \quad (2)$$

(6) 重复(4) 和(5) 的步骤，可以求出隐函数的任意阶导数的关系式和值，从而得到一元幂指函数的任意阶导数的通用公式.

(二) 多元幂指函数的高阶偏导数

多元幂指函数是指形如 $z=f(x,y)^{g(x,y)}$ 的函数，其中 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是关于 x 和 y 的可导函数，且 $f(x,y)>0$。利用隐函数法求解多元幂指函数的高阶偏导数的步骤如下：

(1) 将多元幂指函数视为一个隐函数，即 $z=f(x,y)^{g(x,y)}$ 可以看作是 $F(x,y,z)=f(x,y)^{g(x,y)}-z=0$。

(2) 对隐函数的两边同时求 x 的偏导数，得到隐函数的一阶偏导数的关系式，即

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

其中，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=g(x,y)f(x,y)^{g(x,y)-1}f_x'(x,y)+f(x,y)^{g(x,y)}g_x'(x,y)\ln f(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1$$

(3) 根据隐函数的一阶偏导数的关系式，求出隐函数的一阶偏导数的值，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=g(x,y)f(x,y)^{g(x,y)-1}f_x'(x,y)+f(x,y)^{g(x,y)}g_x'(x,y)\ln f(x,y). \quad (3)$$

同理，可以求出

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=g(x,y)f(x,y)^{g(x,y)-1}f_y'(x,y)+f(x,y)^{g(x,y)}g_y'(x,y)\ln f(x,y).$$

(4) 对隐函数的一阶偏导数的关系式再次求 x 或 y 的偏导数，得到隐函数的二阶偏导数的关系式，例如

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

(5) 根据隐函数的二阶偏导数的关系式，求出隐函数的二阶偏导数的值，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

(6) 重复(4) 和(5) 的步骤，可以求出隐函数的任意阶偏导数的关系式和值，从而得到多元幂指函数的任意阶偏导数的通用公式。

四、具体的例题和分析

为了验证和分析利用隐函数法求解幂指函数的导数问题的方法，本文选取了以下几个具体的例题进行演示和讨论。

例 1：求 $y=x^x$ 的一阶和二阶导数。

解：利用公式(1)，可得

$y'=xx^{x-1}(x')+x^x\ln x(x')$

$=x^x(1+\ln x)$

利用公式(2)，可得

$y''=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$

例 2：求 $z=x^{y^x}$ 的一阶偏导数。

解：将 $z=x^{y^x}$ 视为一个隐函数，即 $z=f(x,y)^{g(x,y)}$，其中 $f(x,y)=x$，$g(x,y)=y^x$。利用公式(3)，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x x^{y^x-1}+x^{y^x+1}y^{x-1}\ln x.\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^x+1}y^{x-1}\ln x.$$

五、结论

本文介绍了利用隐函数法解决幂指函数导数问题的原理和方法，提供了一元幂指函数高阶导数的通用公式以及计算多元幂指函数高阶偏导数的方法，并通过实例进行验证和分析。研究有助于深入理解幂指函数性质，提升数学思维和运算能力，具有理论和实践意义。然而，隐函数法计算过程较为繁琐，容易出现计算错误，未考虑函数的定义域和值域，也未对函数图像和性质进行详细分析。今后的研究可尝试寻找更简便高效的解决方法，利用计算机软件辅助求解和绘图，以更好地理解和应用幂指函数。

参考文献：

[1] 牟录贵，刘永莉. 幂指函数求导法探析[J]. 甘肃高师学报，2005，10(2)：5 - 5.

[2] 李高，常秀芳. 幂指函数的研究[J]. 山西大同大学学报(自然科学版)，2019，35(2)：21 - 22.

[3] 杨雄，袁新全. 幂指函数求导探析[J]. 保山学院学报，2023，42(02)：38 - 43.

[4] 李继猛. 幂指函数的极限与导数求法探究[J]. 电子技术，2021，50(07)：198 - 199.