新高考背景下高等数学内容在高中数学中的辅助应用探讨

朱　琳

黑龙江省牡丹江市第一高级中学　黑龙江　牡丹江　157020

摘　要：随着教育改革的深入，新高考对数学的要求更加注重对学生综合能力和思维水平的考察。高等数学作为大学数学的重要组成部分，其知识体系和方法论对于高中数学的学习具有重要的指导意义。因此，探讨高等数学内容在高中数学中的辅助应用，对于提高高中生的数学素养和解题能力具有重要意义。本文旨在探讨在新高考背景下，大学高等数学中的哪些内容可以下延到高中学习，并如何对高中数学中一些难度较高的题型进行辅助。通过分析高等数学与高中数学之间的联系，提出具体的教学建议，以期帮助高中生更好地理解和应用数学知识。

关键词：高等数学；高中数学；教学内容；衔接

高等数学作为大学理工科各专业学生的必修公共基础课，其教学质量直接关系到学生的专业素养和创新能力。然而，由于高中数学教学内容的改革，使得高等数学与高中数学在教学内容上出现了脱节现象，给学生学习高等数学带来了困难。因此，研究高等数学与新课标下高中数学教学内容的对接问题，对于提高高等数学的教学质量具有重要意义。本文将对新课程标准下的高等数学与高中数学进行详尽的对比分析，仔细审视两者在教学内容、方法以及目标上的差异，并基于这些发现，提出切实可行的衔接策略。这些策略旨在加强高等数学与高中数学之间的教学衔接，使两者能够相辅相成，从而提升数学教学的整体效果，并推动数学学科的持续发展。

一、高等数学与高中数学的定位与联系

（一）高等数学与高中数学的定位

高等数学作为大学阶段的重要基础课程，其定位在于为学生提供一个全面而深入的数学理论体系。它涵盖了代数、分析、几何等多个领域，旨在通过系统的学习和训练，培养学生深厚的数学基础、严密的逻辑思维能力和解决实际问题的能力。高等数学的学习不仅为学生后续的专业学习提供必要的数学工具，也为他们未来在科学、工程、经济等领域的工作和研究奠定坚实的基础。高中数学则作为基础教育阶段的重要组成部分，其定位在于为学生打下坚实的数学基础，培养他们的数学素养和思维能力。高中数学内容涵盖了数与代数、图形与几何、函数与分析、数据处理与概率统计等多个方面，旨在通过基础知识和基本技能的训练，使学生掌握数学的基本思想和方法，形成数学思维和解决问题的能力。

（二）高等数学与高中数学的联系

第一，高中数学与高等数学在知识体系上具有一定的统一性。许多高中数学中的概念、定理和公式在高等数学中都有更深入的研究和应用。例如，高中数学中的数列、函数、导数等概念，在高等数学中会有更加严格的定义和拓展。数列在高等数学中会被进一步探讨其收敛性、极限等性质；函数则会在高等数学中引入更复杂的函数类型，如复合函数、反函数等，并研究其性质和应用。第二，高中数学与高等数学在内容上呈现出连贯性。许多高中数学的知识点是高等数学的基础。例如，高中数学中的三角函数等知识，是微积分学的基础。三角函数在高等数学中会被用于求解各种与角度、周期相关的问题。此外，高中数学中的平面几何、立体几何等知识，也是高等几何的基础。平面几何和立体几何在高等数学中会被进一步抽象化，引入向量、空间坐标等概念，为研究更复杂的几何问题提供工具。这种统一性和连贯性使得高中数学与高等数学在内容上相互衔接、相互补充。高中数学为高等数学的学习提供了必要的基础和准备，而高等数学则为学生提供了更深入、更广阔的知识领域和数学工具，有助于他们更好地理解和应用数学知识。

二、高等数学在高中数学中的应用

（一）高等代数在高中数学中的应用

1. 行列式的应用

行列式在解决线性方程组、矩阵计算等问题中起着举足轻重的作用。在高中数学中，学生通常会接触到线性方程组，而行列式是解决线性方程组问题的一种有力工具。具体来说，行列式可以用来判断线性方程组的解的情况：当行列式不为零时，方程组有唯一解；当行列式为零时，方程组可能无解或有无穷多解。此外，行列式在矩阵计算中也有重要应用。矩阵的行列式值可以用来表示矩阵的“体积”，这在空间几何中有实际意义。同时，行列式也可以用来求解矩阵的逆矩阵，这在求解线性方程组时特别有用。

例子：考虑一个三元线性方程组

$$\begin{cases} 2y+3\mathrm{y}+\mathrm{z}=5 \\ x-y+2z=8 \\ 3x+2y-z=2 \end{cases}$$

其系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

该矩阵的行列式值为

det（A）=2（−1−4）−3（−1−6）+1（−2−3）=−10+21−5=6 ≠ 0

由于行列式不为零，我们知道这个线性方程组有唯一解。接着，我们可以使用行列式或克莱姆法则来求解这个方程组。

2. 柯西—施瓦兹不等式应用

柯西—施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz Inequality）是高等代数中的一个重要不等式，它给出了两个向量点积的上界。在高中数学中，虽然学生可能还没有接触到向量的概念，但不等式本身在解决不等式证明、数值比较等问题中仍然具有应用价值。

柯西—施瓦兹不等式的基本形式为

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leqslant |\boldsymbol{a}^2|\cdot|\boldsymbol{b}^2|$$

其中，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是它们的点积，$|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$ 是它们的模（长度）。在解决一些涉及数值大小比较的问题时，柯西—施瓦兹不等式可以提供一个有力的工具。

（二）微积分方法在中学数学的应用

1. 微积分方法在空间立体体积与表面积中的应用

微积分在求解空间立体体积和表面积问题中发挥着重要作用。在高中数学中，通过引入定积分、重积分等概念，学生可以理解空间立体的体积和表面积的计算方法。例如，对于旋转体（如圆柱、圆锥、球体等），我们可以使用定积分来计算其体积；对于更复杂的立体，如通过平面截得的立体，我们可以使用重积分来计算其体积。类似地，我们也可以使用积分来计算曲面的表面积。

2. 微积分方法在求曲线弧长中的应用

微积分在求解曲线弧长问题中同样具有应用。在高中数学中，通过引入弧长公式和微积分方法，学生可以理解曲线弧长的计算原理和方法。弧长公式通常与曲线参数方程或直角坐标方程相关联，通过对曲线方程进行微分并积分，我们可以得到曲线的弧长。这个积分通常需要数值方法或特殊函数（如椭圆积分）来求解，但在高中水平，我们可以使用近似方法或数值方法来估计其结果。

（三）高等几何在初等几何的应用 .

1. 仿射变换的应用

仿射变换是高等几何中的一个基本概念，它描述了平面上点之间的线性变换，即保持点与点之间共线性的一种几何变换。在高中数学中，引入仿射变换的概念有助于学生理解几何图形的变换规律，特别是在解决涉及图形位置、形状和大小变化的问题时。仿射变换包括平移、旋转、缩放和错切等变换。通过仿射变换，我们可以将复杂的几何问题转化为更简单的形式进行求解。例如，在求解一些与线段长度、角度大小或图形面积相关的问题时，通过适当的仿射变换，可以使得问题中的某些量保持不变，从而简化问题的求解过程。例如，考虑一个平行四边形 $ABCD$，其中 AB 和 CD 是平行边，BC 和 AD 是非平行边。我们可以使用仿射变换将平行四边形 $ABCD$ 映射到一个矩形 $EFGH$ 中，其中 EF 和 GH 是平行边，且 $EF=AB$，$GH=CD$。通过这个仿射变换，我们可以发现平行四边形 $ABCD$ 的面积等于矩形 $EFGH$ 的面积，从而简化了面积的计算。

2. 笛沙格定理的应用

笛沙格定理是高等几何中的一个重要定理，它描述了平面上两个三角形之间的共点、共线关系。在高中数学中，适当引入笛沙格定理的概念和应用，可以帮助学生提高解题能力和数学素养。笛沙格定理的应用范围广泛，它可以用于解决许多与三角形、圆、椭圆等相关的几何问题。通过理解和应用笛沙格定理，学生可以更好地掌握几何图形的性质和规律，提高解题的灵活性和准确性。例如，考虑两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$，其中 AB、AC 分别与 $A'B'$、$A'C'$ 相交于点 D、E，且 BC、$B'C'$ 相交于点 F。如果 AD、AE、$A'D$、$A'E$ 都是所在直线的垂线，那么根据笛沙格定理，点 D、E、F 三点共线。这个定理可以用于证明一些与垂线、交点相关的几何性质，如证明两条直线的垂直关系等。通过引入仿射变换和笛沙格定理等高等几何的概念和应用，我们可以帮助学生更好地理解初等几何中的基本概念和定理，提高他们解决几何问题的能力。同时，这也有助于培养学生的数学素养和思维能力。

3. 点列中四点的交比

交比是射影几何中的一个核心概念，它用来描述点列中四个点之间的相对位置关系。具体地说，给定一直线上的四点 A，B，C，D（通常按照某种顺序排列，如从左到右），点 A 和 D 被称为基点，而 B 和 C 是它们之间的点。这四点的交比记为（AB,CD）或简单地记为（B,C）定义为（AC ｜ BC）/（AD ｜ BD）。如果交比等于 1，则称这四点为调和点列。在初等几何中，交比的概念特别有用，因为它允许我们通过点列中的部分信息来推断整个点列的性质。例如，在解决三角形的相似问题时，我们可以利用交比来找到对应边之间的比例关系。假设我们有两个三角形△ ABC 和△ $A'B'C'$，如果线段 AD 和 $A'D'$ 分别是两个三角形的中位线，那么通过计算交比（B，D）和（B'，D'），我们可以证明△ ABD 与△ $A'B'D'$ 是相似的，并且相似比为 1：2。交比也与其他几何概念有紧密联系。例如，调和点列中的点具有特殊的性质，如调和共轭点。如果点 E 是线段 AB 上的点，且满足（AE,EB）=−1（即交比为 −1），则称 E 是 A 和 B 的调和共轭点。这种关系在几何构造和证明中非常有用。

4. 线束中四条直线的交比的应用

与点列中的交比类似，线束中的交比描述了从一点出发的四条直线之间的相对位置关系。具体地说，给定一个点 O 和从该点出发的四条直线 OA，OB，OC，OD，这四条直线

的交比记为（OA，OC；O）或简单地记为（A，C）定义为（sin∠AOB/sin∠BOC/sin∠AOD/sin∠DOC）。在初等几何中，线束中的交比常用于解决与直线和角度相关的问题。例如，假设我们有一个圆和圆上的四点 A，B，C，D，以及圆心 O。通过计算从圆心 O 出发的射线 OA，OB，OC，OD 之间的交比，我们可以找到圆内接四边形的对角线的性质。如果（A，C）=–1，则四边形 $ABCD$ 是一个矩形。线束中的交比也与其他几何概念有联系，如调和线束。如果一条直线与圆相交于两点 A 和 B，并且该直线上的另外两点 C 和 D 关于圆是调和的（即（C，D）=–1），则称直线 CD 是圆关于于直线 AB 的调和线束。这种关系在圆的性质研究和证明中非常有用。

三、高考试题中的微积分在解题中的应用

（一）拉格朗日中值定理的应用

虽然拉格朗日中值定理是大学微积分中的内容，但在高中数学竞赛或高级别的考试中，可能会作为挑战性问题出现，用于检验学生的数学思维能力和对微积分概念的理解。拉格朗日中值定理（Lagrange Mean Value Theorem）的规范表达如下：如果函数 $f(x)$ 满足以下条件：在闭区间［a，b］上连续；在开区间（a，b）上可导；那么，至少存在一个点 $c\in(a,b)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

这个定理的几何意义是：对于曲线 $y=f(x)$ 上连接两点 $A[a,f(a)]$ 和 $B[b,f(b)]$ 的弦，存在至少一个点 $C[c,f(c)]$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，使得曲线在点 C 处的切线斜率等于弦 AB 的斜率。在证明和应用拉格朗日中值定理时，我们通常会使用罗尔定理（Rolle’s Theorem）作为辅助工具，因为拉格朗日中值定理可以看作是罗尔定理的一个推广。在高中数学知识体系内，虽然不直接教授拉格朗日中值定理，但可以通过引入该定理的概念，让学生了解其在解决函数性质、不等式证明等问题中的应用。

（二）有关级数的应用

级数在微积分学中占有重要地位，是解决许多实际问题的有力工具。在高中数学中，虽然不直接教授级数的概念，但可以通过一些实际问题或特定类型的题目，让学生了解级数的应用和基本概念。在高考或数学竞赛中，可以设计一些涉及级数求和或级数收敛性的题目，让学生利用所学的数列知识来解答。例如，可以给出一些等比数列或等差数列的无穷级数，让学生判断其是否收敛，并求出其和（如果收敛的话）。

例如：求无穷级数 1+1/2+1/4+1/8+... 的和。这个问题可以通过观察数列的通项公式 $a_n=1/2^{(n-1)}$，发现它是一个等比数列，且公比小于 1，因此该级数收敛。然后利用等比数列求和公式，可以求出其和为 2。通过这样的例子，可以让学生了解级数的基本概念和应用，提高他们的数学素养和解题能力。

四、结论

总之，随着新高考改革的推进，高等数学内容在高中数学中的辅助应用越来越重要。通过引入高等数学的概念和方法，可以帮助学生更好地理解高中数学的知识体系，提高解题能力和数学素养。同时，这也为高中数学的教学和学习提供了新的思路和方向。因此，我们应该重视高等数学在高中数学中的应用，加强两者的联系和衔接，推动高中数学教育的改革和发展。这种联系不仅有利于数学教育事业的长足发展，更能深化学生对数学学科的理解。通过有效的衔接，学生们能够更顺利地完成从新课标下高中数学到高等数学的过渡，减少学习上的不适应感，提高整体数学学习成效。这种过渡不仅体现在知识层面的连贯性上，更在思维方式和学术方法上为学生未来的学术生涯奠定坚实基础。实现这一对接是教育改革的必然要求，同时也是对学生未来学术和个人成长的深远投资。高等数学教师和高中数学教师作为推动这一改革的重要力量，应共同努力，加强沟通和协作。通过定期的教学研讨会、经验分享会等形式，教师们可以共同研究教学内容和教学方法的对接问题，探索更有效的教学策略，为学生提供更加连贯、系统的数学教育。

参考文献：

［1］吕琳琳.高等数学与新课标下高中数学几个知识点衔接的研究［J］.金融理论与教学，2019，(06)：113–114+118.DOI：10.13298/j.cnki.ftat.2019.06.024.

［2］侯常红.以高等数学为背景的高考试题分析以及教学建议［J］.语数外学习（高中版上旬），2020，(05)：47.

［3］周思宇，陈友明，刘四平.高等数学背景下高中数学试题命制的方向［J］.上海中学数学，2023，(Z1)：40–42.

［4］丁晗.高等数学教学中高中与大学衔接问题探讨［J］.吉林省教育学院学报，2023，39(08)：129–133.

［5］郭从洲，张冬燕，王耀革，等.关注高中数学重叠内容，以问题驱动式实施高等数学教学［J］.数学学习与研究，2020，(26)：10–11.