复数在正弦交流电路中的应用研究

陈昌华

广州铁路职业技术学院　广东广州　511300

摘　要：用三角函数式和波形图表示正弦量，虽然比较直观，但是把它们用来分析和计算正弦交流电路时，计算量非常大。引入复数，采用相量法，是一种既能进行准确计算，又能简化计算的实用方法，相量法是分析解决正弦交流电路问题的重要方法。本文先梳理复数和复数相关运算，分析复数的直角坐标式、极坐标式和指数式之间的相互转化，然后在正弦交流电路中引入相量法，通过复数的计算来求解正弦交流电路的电流和电压。

关键词：正弦交流电路；复数；相量法；极坐标式；直角坐标式

1. 复数

1.1 复数的概念

形如 $z=a+bi$（a、b 均为实数）的数称为复数。

其中，a 称为实部，b 称为虚部，i 称为虚数单位，$i^2=-1$，$\sqrt{-1}=i$，

$i^{4n+1}=i(i=i)$，$i^{4n+2}=-1(i^2=-1)$，$i^{4n+3}=-i(i^3=-i)$，$i^{4n+4}=1(i^4=-i^2=1)$。

1.2 复数的模

将复数 $z=a+bi$ 的实部与虚部的平方和的正的平方根的值称为该复数的模，记作$|z|$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。

1.3 复数的辐角

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r$ 是 z 的模，θ 是 z 的辐角，记作 $\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$。

1.4 共轭复数

两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数。

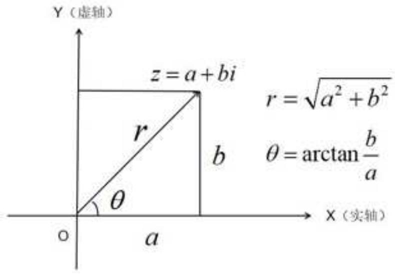
$z=a+bi$ 的共轭复数记为 $\tilde{z}=a-bi$ 或 $z^*=a-bi$。

2. 复数的四种表示方式：

2.1 直角坐标式

建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面，x 轴叫实轴，y 轴叫虚轴。

$z=a+bi$



运算法则：

$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$i^2=-1$

（1）$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

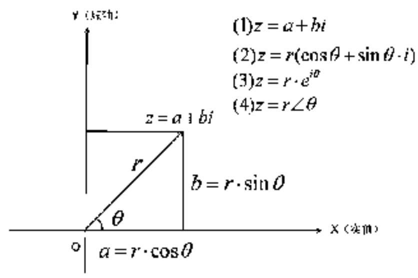
（2）$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$

（3）

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

（4）

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$



2.2 三角式

$z=r\cos\theta+r\sin\theta\cdot i=r(\cos\theta+\sin\theta\cdot i)$，

（$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$）

2.3 指数式（欧拉公式：$\cos x+\sin x\cdot i=e^{ix}$）

$$z=r(\cos\theta+\sin\theta\cdot i)=re^{i\theta}$$

2.4 极坐标式

$z=r\angle\theta$，（极径：r，极角：θ）

2.5 欧拉公式简要证明

泰勒公式：

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

由泰勒公式得到 e^x、$\sin x$、$\cos x$ 的幂级数如下：

（1）$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots$

（2）$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\cdots$

（3）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\cdots$

用 ix 替换 e^x 中的 x，$i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}\cdots\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}\cdot i+\frac{x^2}{2!}\cdot i^2+\frac{x^3}{3!}\cdot i^3+\frac{x^4}{4!}\cdot i^4+\frac{x^5}{5!}\cdot i^5+\frac{x^6}{6!}\cdot i^6\cdots\frac{x^n}{n!}\cdot i^n+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}\cdot i-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\cdot i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cdot i-\frac{x^6}{6!}\cdots\frac{x^n}{n!}\cdot i^n+\cdots$$

$$\Rightarrow(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots)\cdot i=\cos x+\sin x\cdot i$$

3. 复数不同表示形式的运算优势分析

在复数的运算中，加减运算优先选用直角坐标式，乘除运算优先选择指数式或极坐标式。

$$A=a_1+a_2i=a(\cos\theta_1+\sin\theta_1\cdot i)=a\cdot e^{i\theta_1}=a\angle\theta_1$$

，（$a=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$，$\theta_1=\arctan\frac{a_2}{a_1}$）

$$B=b_1+b_2i=b(\cos\theta_2+\sin\theta_2\cdot i)=b\cdot e^{i\theta_2}=b\angle\theta_2$$

，（$b=\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}$，$\theta_2=\arctan\frac{b_2}{b_1}$）

（1）$A\pm B=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)i$

（2）

$$A\cdot B=ae^{i\theta_1}\cdot be^{i\theta_2}=ab\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}=ab\angle(\theta_1+\theta_2)=(a\angle\theta_1)\cdot(b\angle\theta_2)$$

（3）

$$\frac{A}{B}=\frac{ae^{i\theta_1}}{be^{i\theta_2}}=\frac{a}{b}\cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{a}{b}\angle(\theta_1-\theta_2)=\frac{a\angle\theta_1}{b\angle\theta_2}$$

4. 复数不同形式之间的转化

4.1 直角坐标式转极坐标式

$A=a+bi$

$\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arctan\frac{b}{a}$，得到 $A=r\angle\theta$

4.2 直角坐标式转指数式

$A=a+bi$

$\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arctan\frac{b}{a}$，得到 $A=re^{i\theta}$

4.3 极坐标式转直角坐标式

$A=r\angle\theta$

$\Rightarrow a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，得到 $A=a+bi$

4.4 指数式转直角坐标式

$A=re^{i\theta}$

$\Rightarrow a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，得到 $A=a+bi$

4.5 指数式与极坐标式之间的互转

$A=re^{i\theta}\Leftrightarrow A=r\angle\theta$

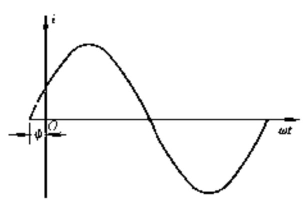
5. 复数在正弦交流电路中的应用分析

5.1 正弦交流电路

5.1.1 正弦交流电路

正弦交流电路是指含有正弦电源，所产生的电压和电流都按正弦规律变化的电路。日常生活和生产实践中接触的大多为正弦交流电。

正弦电流的瞬时值表达式为 $i=\mathrm{I_m}\sin(\omega t+\varphi)$



其中：

（1）$\mathrm{I_m}$ 为正弦电流的最大值（振幅），正弦电流的有效值 $\mathrm{I}=\frac{\mathrm{I_m}}{\sqrt{2}}$（$\mathrm{I_m}=\sqrt{2}I$，为正弦电流的第一特征量。

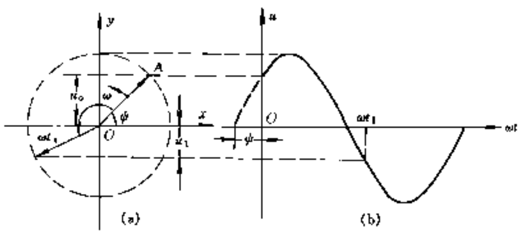
（2）$\omega t+\varphi$ 称为相位（相位角），随时间变化而变化。

ω 称为角频率，变化周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，为正弦电流的第二特征量；

φ 称为初相位（初相角），为起始位置，此时，$t=0$，为正弦电流的第三特征量。

5.1.2 正弦交流电压

正弦电压的瞬时值表达式为 $u=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$。



其中：

（1）U_{m} 为正弦电流的最大值（振幅），正弦电流的有效值 $U=\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$（$U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$，为正弦电压的第一特征量。

（2）$\omega t+\varphi$ 称为相位（相位角），随时间变化而变化。

ω 称为角频率，变化周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，为正弦电压的第二特征量；

φ 称为初相位（初相角），为起始位置，此时，$t=0$，为正弦电压的第三特征量。

5.2 相量法

用三角函数式和波形图表示正弦量，虽然比较直观，但是把它们用来分析和计算正弦交流电路时，将会非常繁琐。所以人们试图寻找一种既能进行准确计算，同时又能简化计算过程的实用方法，即下面介绍的相量法。

5.2.1 相量：用复数表示的正弦量，用大写字母上打点表示，如电压相量 $\dot{U}$、电流相量 $\dot{I}$。

5.2.2 相量法，即用复数法来表示正弦量。

（1）复数模 r：正弦量的最大值 $\mathrm{I_m}$ 或有效值 I；

（2）幅角 θ：初相位 φ。

5.2.3 正弦交流电流：$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$

对应的相量为：

$$\dot{I}=I\angle\varphi=I\cdot e^{i\varphi}=I\cdot\cos\varphi+(I\cdot\sin\varphi)i$$

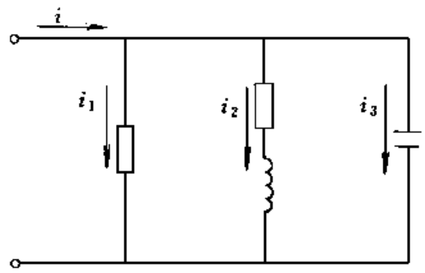
5.2.4 正弦交流电压：$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$

对应的相量为：

$$\dot{U}=U\angle\varphi=U\cdot e^{i\varphi}=U\cdot\cos\varphi+(U\cdot\sin\varphi)i$$

6. 正弦交流电路中复数应用的案例分析

案例 1：电路如下图所示，已知 $i_1=5\sqrt{2}\sin(314t)A$，$i_2=8\sqrt{2}\sin(314t\text{-}30^{\circ})A$，$i_3=10\sqrt{2}\sin(314t\text{+}90^{\circ})A$，求 i。



解：

$$\dot{I}_1=5\angle0^{\circ}A\Rightarrow(5\cos0^{\circ}+5\sin0^{\circ}i\quad A=(5-0i)A$$

$$\dot{I}_2=8\angle-30^{\circ}A=[8\cos(-30^{\circ})+8\sin(-30^{\circ})i]A=(6.928-4i)A$$

$$\dot{I}_3=10\angle90^{\circ}A=(10\cos90^{\circ}+10\sin90^{\circ}i)A=(0+10i)A$$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=[(5+0i)+(6.928-4i)+(0+10i)]A=(11.928+6i)A$$

$$=\sqrt{11.928^2+6^2}\angle(\arctan\frac{6}{11.928})A=13.35\angle26.7^{\circ}A$$

得到

$$i=13.35\sqrt{2}\sin(314t+26.7^{\circ})A$$

案例 2：已知 $u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314t+30^{\circ})V$，$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(314t+60^{\circ})V$，求 $u(t)\text{=}u_1(t)\text{+}u_2(t)$。

解：

$$\dot{u}_1=6\angle30^{\circ}V\text{=}(6\cos30^{\circ}+6\sin30^{\circ}\cdot i)V=(5.19+3i)V$$

$$\dot{u}_2=4\angle60^{\circ}V\text{=}(4\cos60^{\circ}+4\sin60^{\circ}\cdot i)V=(2+3.46i)V$$

$$\dot{u}=\dot{u}_1+\dot{u}_2=[(5.19+3i)+(2+3.46i)]V=(7.19+6.46i)V$$

$$=\sqrt{7.19^2\text{+}6.46^2}\angle\arctan\frac{6.46}{7.19}V=9.64\angle41.9^{\circ}V$$

得到

$$u(t)=9.64\sqrt{2}\sin(314t+41.9^{\circ})V$$

参考文献：

[1] 韩志刚 . 浅谈复数的代数形式向复数的三角形式转化的方法 . 锦州师范学院学报 (自然科学版).1997 (4):18–20.

[2] 余辉晴 ; 吴少群 . 复数在交流电路分析中的应用 . 宁波工程学院学报 .2017 (9):6–8.

[3] 林娇燕 . 计算正弦交流电路的一种方法 – 相量法 . 湘潭师范学院学报 (社会科学版).2000(5):87–90.

[4] 吕仁花 . 浅谈相量法在快速分析计算正弦交流电路问题中的应用 . 安徽科技学院学报 .2012 (5):58–62.

[5] 李洪津，史延龄，邹来智，董正才 . 正弦量的相量转换 . 高 师 理 科 学 刊 .2009 (3):57–59.

基金项目：

广东省教育科研项目（高校教育专项）2024GXJK859 数字技术赋能高职应用数学课程混合式教学改革探索与实践。

作者简介：

陈昌华（1987–），男，硕士，讲师，从事应用数学研究。