一个具有脉冲效应的捕食系统的研究

安 莹
晋中师范高等专科学校 山西晋中 030600

摘 要： 文中建立并研究了一类捕食者具有脉冲作用和非单调功能反应的捕食系统，利用 Floquet 乘子理论及脉冲比较定理，得到了系统灭绝与持续生存的充分条件。

关键词： 捕食—食饵系统；脉冲；Floquet 乘子

引言

捕食系统是非常重要的生态系统，已有许多相关研究成果。本文对文 [1] 中的模型进行了改进，研究下面具有非单调功能反应且对捕食者进行周期常熟输入的脉冲捕食系统。

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(a-bx_1)-\frac{cx_1x_2}{1+\omega x_1+mx_1^2} \\ \dot{x}_2(t) &= -dx_2+\frac{ecx_1x_2}{1+\omega x_1+mx_1^2} \end{aligned}\right\} & t\neq nT \\ \left.\begin{aligned} x_1(nT^+) &= x_1(nT) \\ x_2(nT^+) &= x_2(nT)+p \\ x(0^+) &= x_0=(x_{10},x_{20})^T \end{aligned}\right\} & t=nT \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 分别是食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的密度，a、b、c、d 是正常数，$0<c<1$，ω，m 为常数，$n\in N$，N 为自然数集，$\phi(x)=\frac{cx_1}{1+\omega x_1+mx_1^2}$ 是非单调的功能性反应函数，T 为脉冲周期，p 为脉冲大小或迁入量 $(p\geq 0)$.

由于单位时间内，捕食者总要捕捉食饵，所以 $\phi(x)>0$ 恒成立，既满足条件 $\omega^2<4m$ （2）

1 基本概念和引理

设 $R_+=[0,+\infty)$，$R_+^2=\{x\in R^2\mid x\geq 0\}$，令 $V_0=\{V\mid R_+\times R_+^2\to R_+$，$V$ 在 $(nT,(n+1)T]$ 上连续且 $\lim_{(t,y)\to(nT^+,x)t>nT}V(t,y)=V(nT^+,x)$ 存在｝.

定义 1 设 $V\in V_0$，则对 $(t,x)\in(nT,(n+1)T]\times R_+^2$ 关于系统 (1) 的在上导数定义为：

$$D^+V(t,x)=$$
$$\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}[V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)]$$

其中 $f(t,x)=(f_1,f_2)^T$ 是系统 (1) 的右端函数.

定义 2 设 $x(t)$ 为系统 (1) 满足 $x(0^+)>0$ 的解，若存在常数 $M\geq m>0$ 和 T_0，当 $t>T_0$ 时，系统 (1) 的所有正解 $(x_1(t),x_2(t))$ 满足 $m\leq x_i(t)\leq M$，$(i=1,2)$，则系统 (1) 是持续生存的，同时也称该系统中的每个种群是持续生存的.

系统 (1) 的解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$ 是分段连续函数，当 $t\in(nT,(n+1)T)$，$x(t)$ 是连续的并且 $x(nT^+)=\lim_{t\to nT^+}x(t)$，显然 f 的光滑性保证了解的存在唯一性. 不难得到.

引理 1 设 $x(t)$ 为系统 (1) 过初值 $x(0^+)\geq 0$ 的解，则对所有 $t\geq 0$，有 $x(t)\geq 0$，并且若 $x(0^+)>0$，则有 $x(t)>0$，$t>0$.

引理 2[2] 设 $V\in V_0$，$x(t)$ 是系统 (1) 在区间的任意解，且

$$\begin{cases} D^+V(t,x)\leq g(t,V(t,x)) & t\neq nT \\ V(t,x(t^+))\leq \Psi_n(V(t,x(t))) & t=nT \end{cases}$$

这里，g：$R_+\times R_+\mid\to R$ 在 $(nT,(n+1)T]\times R_+$ 上连续，且对 $x\in R_+$，$n\in N$，

$\lim_{(t,y)\to(nT^+,x)} g(t,y) = g(nT^+,x)$ 存在，$\Psi_n : R_+ \to R_+$ 是非减的．又设 $r(t)$ $(t\ge 0)$ 是下列标量脉冲微分方程的最大解

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -dy(t) & t \ne nT \\ y(nT^+) = y(nT) + P & t = nT \\ y(0^+) = y^0 \end{cases} \quad (3)$$

则 $V(0^+,x_0) \le y_0$ 蕴含着

$V(t,x(t)) \le r(t)$，$t \ge 0$．

引理 3　系统 (3) 有一个正周期解 $y^*(t)$ 且对系统 (3) 的其他任何正解 $y(t)$，均有 $|y(t)-y^*(t)| \to 0,\ t\to\infty$．

其中 $y^*(t) = \dfrac{p\exp(-d(t-nT))}{1-\exp(-dT)}$．

证明　在任何无脉冲区间 $(nT,(n+1)T]$ 上对系统 (3) 的第一个方程积分得

$$y(t) = y(nT^+)e^{-d(t-nT)}\quad nT < t \le (n+1)T$$

从而

$$y[(n+1)T] = y(nT^+)e^{-dT} = (y(nT)+p)e^{-dT}$$

若系统 (3) 有一个以 T 为周期的正解，则

$y(nT) = y[(n+1)T]$．

由此可得

$$y(nT) = \frac{pe^{-dT}}{1-e^{-dT}},$$

$$y(nT^+) = \frac{pe^{-dT}}{1-e^{-dT}} + p = \frac{p}{1-e^{-dT}}.$$

从而系统 (3) 有一个相应的以 T 为周期的解

$$y^*(t) = \frac{pe^{-d(t-nT)}}{1-e^{-dT}},\ nT < t \le (n+1)T$$

其中 $y^*(0^+) = \dfrac{p}{1-e^{-dT}}$．

再者，由

$$y[(n+1)T^+] = y[(n+1)T] + p$$

$$= y(nT^+)\exp(-dT) + p \qquad nT < t \le (n+1)T$$

得

$$y(nT^+) = y[(n-1)T^+]\exp(-dT) + p$$

$$= y[(n-2)T^+]\exp(-2dT) + p\exp(-dT) + p$$

从而 $y(nT^+) = \dfrac{pe^{-dnT}}{1-e^{-dT}} + y^0e^{-dnT}$，依此类推，得

$$y(nT^+) = p(1+e^{-dT}+e^{-2dT} + \cdots\cdots + e^{-(n-1)dT}) + y^0e^{-dnT}$$

又系统 (3) 的任意解为

$$y(t) = [\frac{p(1-e^{-dnT})}{1-e^{-dT}} + y^0e^{-dnT}]e^{-d(t-nT)}$$

$$= y^0e^{-dt} + \frac{p}{1-e^{-dT}}e^{-d(t-nT)} - \frac{pe^{-dt}}{1-e^{-dT}}$$

$$= (y^0 - y^*(0^+))e^{-dt} + y^*(t)$$

因此可得

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)-y^*(t)| = \lim_{t\to\infty}|y^0-y^*(0^+)|e^{-dt} = 0$$

2　灭绝与持续生存

定理 1　如果 $T < \dfrac{pc}{ad}$，则是渐近稳定的．

证明

令 $x_1(t) = u(t)$，$x_2(t) = x_2^*(t) + v(t)$，

则系统 (1) 的线性方程为

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{u}(t) &= (a - cx_2^*(t))u(t) \\ \dot{v}(t) &= -dv(t) + ecx_2^*(t)u(t) \end{aligned}\right\} & t \ne nT \\ \left.\begin{aligned} u(nT^+) &= u(nT) \\ v(nT^+) &= v(nT) \end{aligned}\right\} & t = nT \end{cases} \quad (4)$$

记 $A(t) = \begin{pmatrix} a - cx_2^* & 0 \\ ecx_2^* & -d \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(t) = B\exp(\int_0^T A(t)dt)$$

$$= B\exp\begin{pmatrix} \int_0^T (a - c\dfrac{p\exp(-dt)}{1-\exp(-dT)})dt & 0 \\ \int_0^T \dfrac{ecp\exp(-dt)}{1-\exp(-dT)}dt & -dT \end{pmatrix}$$ 由

于 $T < \frac{cp}{ad}$，所以 M 的两个特征值满足

$$|\lambda_1| = \left|\exp(aT - \frac{cp}{d})\right| < 1$$

$$|\lambda_2| = |\exp(-dT)| < 1$$

从而根据 Floquet 理论知，$(0, x_2^*(t))$ 是局部渐近稳定的 .

定理 2　存在常数 $M > 0$，使得对系统 (1) 的解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$，当 t 充分大时，有 $x_i(t) \le M$，$i = 1, 2$.

定理 3　若 $T > \frac{pc}{ad}$，则系统 (1) 是一直持续生存的.

证明　对于系统 (1) 的任意一个解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$，由定理 2 知，存在 $M > \frac{a}{b}$，不妨假设对 $t \ge 0$ 均有 $x_i(t) \le M$.

令 $m_2 = \frac{p\exp(-dT)}{1-\exp(-dT)} - \varepsilon_2$，$\varepsilon_2 > 0$.

由引理 2，引理 3 知，当 t 足够大时，$x_2(t) > m_2$，下面只需证明存在常数 $m_1 > 0$，当 t 充分大时，$x_1(t) > m_1$.

（1）因为 $T > \frac{pc}{ad}$，选择 $m_3 > 0$，$\varepsilon_1 > 0$ 充分小，使得

$$m_3 < \min\{\frac{a}{b}, \sqrt{\frac{1}{m}}\} \qquad \delta = \frac{ecm_3}{1 + \omega m_3 + mm_3^2} < d$$

$$\sigma = (a - bm_3)T - \frac{p}{d-\delta} - \varepsilon_1 T > 0$$

可知，$x_1(t) < m_3$ 对所有 $t > 0$ 并不成立.

若 $x_1(t) < m_3$ 对所有 $t > 0$，则 $\dot{x}(t) \le x_2(d-\delta)$

由引理 2，引理 3 知 $x_2(t) \le z(t)$，$z(t) \to \bar{z}(t)$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (-d+\delta)z(t) & t \ne nT \\ z(nT^+) = z(nT) + p & t = nT \\ z(0^+) = x_{20} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$z(t)$ 为 (6) 的解，

$$\bar{z}(t) = \frac{p\exp[(-d+\delta)(t-nT)]}{1-\exp((-d+\delta)T)}$$

$t \in (nT, (n+1)T]$

所以存在 $T_1 > 0$，使得 $t > T_1 > 0$ 时，有 $x_2(t) \le z(t) \le \bar{z}(t) + \varepsilon_1$.

$$\dot{x}_1(t) = x_1(a - bx_1 - \frac{cx_2}{1 + \omega x_1 + mx_1^2}) \quad (7)$$

$$\ge x_1[a - bm_3 - (\bar{z}(t) + \varepsilon_1)]$$

设 $N_1 \in N$ 且 $N_1 T \ge T_1$，将 (6) 在 $(nT, (n+1)T]$ 上积分得

$$x_1((n+1)T) \ge x_1(nT^+)\exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T}(a - bm_3 - (\bar{z}(t) + \varepsilon_1))\right)$$

$$= x_1(nT^+)\exp((a - bm_3)T - \varepsilon_1 T - \frac{p}{d-\delta}) = x_1(nT^+)\exp(\sigma)$$

由此知

$$x_1((n+2)T) \ge x_1((n+1)T)\exp(\sigma) \ge x_1(nT^+)\exp(2\sigma)$$

依此类推

$$x_1((N_1 + k_1)T) \ge\ge x_1(N_1 T^+)\exp(k_1\sigma) \to \infty \quad k_1 \to \infty$$

得出矛盾.

所以存在一个 $t_1 > 0$，$x_1(t_1) \ge m_3$.

（2）若 $x_1(t) \ge m_3$，$t \ge t_1$，则取 $m_1 = m_3$ 即可.

现在，我们需要考虑，这些离开区域 $\Omega = \{x \in R_+^2 \,|\, x_1(t) < m_3\}$ 再次进入 Ω 中.

取 $t^* = \inf_{t \ge t_1}\{x_1(t) < m_3\}$，这有

$x_1(t) \ge m_3$，$t \in [t_1, t^*)$，

$t^* \in (n_1 T, (n+1)T]$，$n_1 \in N$，

由于 $x_1(t)$ 是连续的，所以有 $x_1(t^*) = m_3$，选择 $n_2, n_3 \in N$，且使得

$$n_2 T > T_2 = \frac{\ln\frac{\varepsilon}{M+b}}{-d+\delta}$$

$\exp((n_2+1)\sigma_1 T)\exp(n_3\sigma)>1$

其中 $\sigma_1=a-bm_3-\frac{c}{|\omega|}M<0$.

令 $\overline{T}=(n_2+n_3)T$，必有

$t_2\in((n_1+1)T,(n_1+1)T+\overline{T}]$，使得 $x_1(t_2)\geq m_3$。

否则，当 $t\in((n_1+1)T,(n_1+1)T+\overline{T}]$ 时，

$x_1(t)<m_3$.

考虑（6）且满足初始条件使得 $z((n_1+1)T^+)=x_2((n_1+1)T^+)$ 的解：

$$z(t)=(z((n_1+1)T^+)-\frac{p}{1-\exp((-d+\delta))})$$
$$\times\exp((-d+\delta)(t-(n_1+1)T))+\overline{z}(t)$$

当 $t\in(nT,(n+1)T]$，其中

$n_1+1\leq n\leq n_1+1+n_2+n_3$ 时．从而

$$\left|z(t)-\overline{z}(t)\right|=$$

$$|(z((n_1+1)T^+)-\frac{p}{1-\exp((-d+\delta))})$$
$$\times\exp((-d+\delta)(t-(n_1+1)T))|$$

$$\leq\left|M+p-\frac{p}{1-\exp((-d+\delta))}\right|$$
$$\times\exp((-d+\delta)(t-(n_1+1)T))$$

$$<(M+p)\exp((-d+\delta)n_2T)$$

$$<\varepsilon_1$$

其中

$(n_1+1+n_2)T\leq t\leq(n_1+1)T+\overline{T}$.

因此，$x_2(t)\leq z(t)\leq\overline{z}(t)+\varepsilon_1$，且 (7) 在 $((n_1+1+n_2)T,(n_1+1)T+\overline{T}]$ 上成立.

类似于步骤 1，有

$$x_1(((n_1+1)+n_2+n_3)T)$$
$$\geq x_1(((n_1+1)+n_2+)T)\exp(n_3\sigma)$$

对于 $t\in(t^*,(n_1+1)T)$ 有两种情况.

情况 1　如果 $t\in(t^*,(n_1+1)T]$ 时，$x_1(t)\geq m_3$，则当 $t\in(t^*,(n_1+1+n_2)T]$ 时，$x_1(t)>m_3$

由系统 (1) 给出

$$\dot{x}_1(t)\geq x_1(t)(a-bm_3-\frac{c}{|\omega|}M)=\sigma_1x_1(t)\qquad(8)$$

将（8）在区间 $(t^*,(n_1+1+n_2)T]$ 积分，得到

$x_1((n_1+1+n_2+)T)\geq m_3\exp(\sigma_1(n_1+1)T)$ 则

$$x_1((n_1+1+n_2+n_3)T)$$
$$\geq x_1((n_1+1+n_2+)T)\exp(n_3\sigma)$$
$$\geq m_3\exp(\sigma_1(n_1+1)T)\exp(n_3\sigma)$$
$$\geq m_3$$ 矛盾.

如果令 $\overline{t}=\inf_{t>t^*}\{x_1(t)\geq m_3\}$，则 $x_1(\overline{t})=m_3$ 和 (8) 在 $t\in[t^*,\overline{t})$ 成立.

这样 (8) 在 $[t^*,\overline{t})$ 积分，得到

$$x(t)\geq x_1(t^*)\exp(\sigma_1(t-t^*))$$
$$\geq m_3\exp(\sigma_1(n_2+1+n_3)T)$$，

记 $m_3\exp(\sigma_1(n_2+1+n_3)T)=m_1$，由于

$x_1(\bar{t}) \ge m_3$，所以对于 $t > \bar{t}$，同样讨论，有 $x_1(t) \ge m_1$. 上述过程可以重复.

情况 2　存在一个 $t' \in (t^*, (n_1+1)T]$，使得 $x_1(t') \ge m_3$，令

$$\underline{t} = \inf_{t > t^*} \{x_1(t) \ge m_3\}$$

则 $t \in [t^*, \underline{t})$ 时，$x_1(t) < m_3$ 且 $x_1(\underline{t}) = m_3$.

当 $t \in [t^*, \underline{t})$，$(8)$ 成立且将 (8) 在 $[t^*, \underline{t})$ 积分，可以得到

$$x_1(t) \ge x_1(t^*) \exp(\sigma_1 (t - t^*))$$

$$\ge m_3 \exp(\sigma_1 T) \ge m_1$$

因为 $x_1(\underline{t}) \ge m_3$，所以对于 $t \ge \underline{t}$，上述过程可以重复.

通过上面的讨论，可得对所有 $t \ge t_1$，$x_1(t) \ge m_1$.

注：令 $g(T) = \exp(aT - \frac{cp}{d}) - 1$，因为

$$g(0) = \exp(-\frac{cp}{d}) - 1 < 0,$$

$$\lim_{T \to \infty} g(T) = \infty$$

且 $g''(T) = a^2 \exp(aT - \frac{cp}{d}) > 0$，所以 $g(T) = 0$ 有唯一的正根，记为 $T_{\max}$. 由定理 1 和定理 3，我们知道，$T < T_{\max}$ 时，食饵灭绝周期解 $(0, x_2^*(t))$ 是渐近稳定的. $T > T_{\max}$ 时，系统是一致持续生存的.

参考文献：

[1] 马苏奇 . 具有食饵群体抵御力作用影响的捕食系统 . 中国农业大学学报 ,2004,9 (2):89–92 (2).

[2] V.Lakshmikantham，D.Bainov,P.S.Simeonov。Thero of impulsive differential equations[M].singapore:World Scientific,1989.

[3] 张惠英，陈凤德 . 具有 Beddington–DeAngelis 功能反应的三种群食物链系统的周期解 [J]. 福州大学学报 ,2004,32(4) :(413–416)