一个数学几何模型的若干思考

陈燕萍

浙江省义乌大成中学　浙江义乌　322000

摘　要： 在高中数学解题过程中，经常会用到模型思想。本文以一个数学几何模型为引子，例举该模型在三个方面的应用，分别是求三角形面积的最大值，判断三角形解的个数及模型与其它知识的巧妙融合，并将其推广到一般的情形，揭示其内容本质，展示通性通法，体现推广后的教学价值。

关键词： 模型；应用；推广

引言

模型思想是高中数学教学的重要思想方法，是提高学生数学解题能力的有效途径，教学中要渗透学生数学模型思想，从而达到触类旁通，举一反三的效果。以下是我对一个数学几何模型的几点思考。

1. 模型呈现

如图 1，在 ΔABC 中，已知角 C（锐角）与边 AB，则点 C 在以 AB 为弦长，以角 C 为圆周角的优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上。

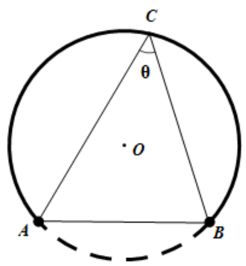


图1

如图 2，在 ΔABC 中，已知角 C（钝角）与边 AB，则点 C 在以 AB 为弦长，以角 C 为圆周角的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上。

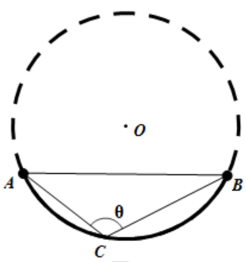


图2

2. 模型应用

模型在求三角形面积最大值的应用

例 1：在 ΔABC 中，已知角 $C=60^{\circ}$，$AB=\sqrt{3}$，则 ΔABC 面积的最大值为________.

分析：由模型 1 可知，点 C 在以 $AB=\sqrt{3}$ 为弦长，以 $\angle C=60^{\circ}$ 为圆周角的优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，所以当 $CA=CB$，即 ΔABC 为等边三角形时面积最大为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

变式 1：在 ΔABC 中，已知角 $B=60^{\circ}$，点 D 是 AC 的中点，$BD=\sqrt{3}$，则 ΔABC 面积的最大值为________.

分析：过点 A 作 DB 的平行线交 CB 的延长线于点 E，如图 3.

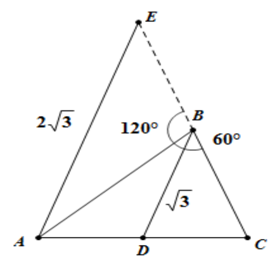


图3

因为 $BD=\sqrt{3}$，$\angle ABC=60^{\circ}$，所以 $AE=2\sqrt{3}$，$\angle ABE=120^{\circ}$，由模型 2 可知，点 B 在以 $AE=2\sqrt{3}$ 为弦长，以 $\angle ABE=120^{\circ}$ 为圆周角的劣弧 $\overset{\frown}{AE}$ 上，所以当 $AB=BE=2$ 时，ΔABE 的面积最大为 $\sqrt{3}$，又 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABE}$，所以 ΔABC 的面积最大值为 $\sqrt{3}$.

变式 2：在 ΔABC 中，已知角 $C=120^{\circ}$，点 D 是边 AB 上靠近 A 的三等分点，且 $CD=1$，则 ΔABC 面积

的最大值为 ________.

分析：过点 A 作 DC 的平行线交 BC 的延长线于点 N，如图 4. 因为 $CD=1$，$\angle ACB=120^0$，所以 $AN=\frac{3}{2}$，$\angle ACN=60^0$，由模型 1 可知，点 C 在以 $AN=\frac{3}{2}$ 为弦长，以 $\angle ACN=60^\circ$ 为圆周角的优弧 $\overset{\frown}{AN}$ 上，所以当 $CA=CN=\frac{3}{2}$ 时，ΔACN 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{16}$，又 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACN}}=\frac{BC}{CN}=\frac{BD}{AD}=2$，所以三角形 ABC 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

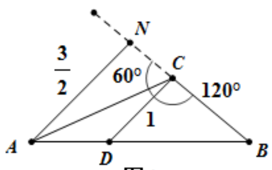


图4

实际上，变式 2 还可以推广到一般的情形：设 $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$，$\angle ACB=\theta$，$CD=x$，所以 $AN=\frac{m+n}{n}x$，$\angle ACN=\pi-\theta$，由模型知当且仅当 $CA=CN$ 时，ΔACN 面积最大为 $\frac{1}{4}(\frac{m+n}{n}x)^2\tan\frac{\theta}{2}$，又 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACN}}=\frac{n}{m}$，所以 $S_{\Delta ABC}\le\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{4}(\frac{m+n}{n}x)^2\tan\frac{\theta}{2}$. 推广的意义在于巧妙地利用模型解决了一类三角形被一条线段分成两个三角形后，求原来三角形面积最大值的问题，当然还可以求其面积延伸出来的一系列问题。从平时解题的反馈来看，碰到此类题目时学生心理感到害怕，或者是无从下手，即使下笔做了也是非常繁琐的代数运算，得分率极低。

模型在判断三角形解个数的应用

我们知道已知三角形两边及一边的对角，求三角形的解会出现无解、一解和两解的情况。一般来说，判断三角形解的个数可以利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及三角形中大边对大角小边对小角相结合来分析，也可以画图比较已知边与高的大小数形结合来分析，下面例举用模型来判断三角形解的个数。

例 2：在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{7}$，$b=2, A=60^\circ$，则 ΔABC 的解的个数为 ______.

分析：由模型 1 知点 A 在以 $BC=\sqrt{7}$ 为弦长，以 $\angle BAC=60^\circ$ 为圆周角的优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，以点 C 为圆心，以 2 为半径作圆，如图 5.

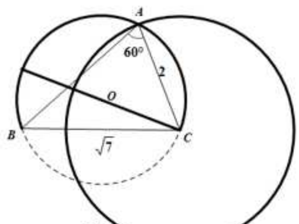


图5

由图可知，优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 与圆 C 的交点就是点 A，因为只有一个交点，所以三角形只有一解。

变式 1：在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{2}, A=60^\circ$，则 ΔABC 的解的个数为 ______.

分析：由例 1 知点 A 在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，以点 C 为圆心，以 $2\sqrt{2}$ 为半径作圆，如图 6.

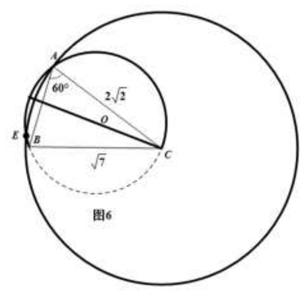


图6

因为圆 O 直径 $d=\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，由于 $\sqrt{7}<2\sqrt{2}<\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，由图可得优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 与圆 C 有两个交点 A, E，所以三角形有两解。

变式 2：在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{7}$，

$b=\dfrac{2\sqrt{21}}{3},A=60^{\circ}$，则 ΔABC 的解的个数为 ______.

分析：由例 1 知点 A 在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，以点 C 为圆心，以 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ 为半径作圆，如图 7.

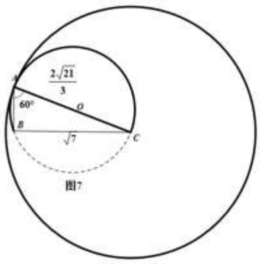


图7

因为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}=d$，由图可得优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 与圆 C 内切，只有一个交点，所以三角形只有一解 .

变式 3：在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{7}$，$b=4,A=60^{\circ}$，则 ΔABC 的解的个数为 ______.

分析：因为 $4>\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，所以点 A 不存在，所以三角形无解 .

变式 4：在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{7}$，$b=2,A=120^{\circ}$，则 ΔABC 的解的个数为 ______.

分析：由模型 2 知，点 A 在以 $BC=\sqrt{7}$，以 $\angle A=120^{\circ}$ 为圆周角的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，以点 C 为圆心，以 2 为半径作圆，如图 8. 由图 8 可得劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 与圆 C 只有一个交点，故 ΔABC 只有一解。

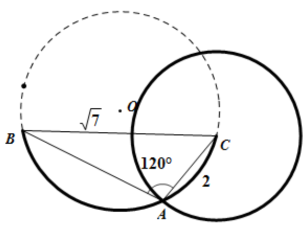
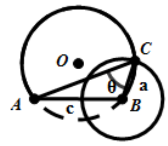
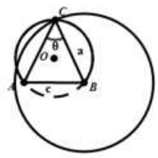
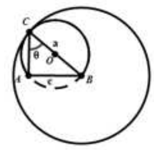
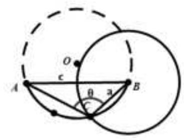


图8

在实际教学中，可以利用几何画板来演示下列动画过程，更加直观易懂。

θ 角	图形	关系式	解的个数
θ 为锐角		$0<a\le c$	一解
		$c<a<\dfrac{c}{\sin\theta}$	两解
		$a=\dfrac{c}{\sin\theta}$	一解
θ 为钝角		$0<a<c$	一解

虽然判断三角形解的个数是平常教学中的重点内容，也是学生的难点，教师花很大力气讲授，但由于其情形复杂多样，学生掌握起来的效果不理想。我们通过抓牢已知三角形两边及一边对角的本质，也就是弧与圆的交点，利用两轨迹交点个数来得出三角形解的个数，操作简单，直观易懂。翻阅浙江省历年高考数学试卷，考察解三角形知识点的题目出现多次，利用上述方法，事先做个判断，可以避免学生在解此类问题时的盲目性。

模型与其它知识的巧妙融合

与平面向量的融合

向量集数与形于一身，我们可以在向量中感受到各种几何图形。例如已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是夹角为 60° 的单位向量，向量 $\vec{c}$ 满足 $\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=60^{\circ}$，不难发现其几何意义就是模型 1。

例 3：已知平面向量 $\alpha,\beta(\alpha\neq 0,\alpha\neq\beta)$ 满足 $|\beta|=1$，且 α 与 $\beta-\alpha$ 的夹角为 120°，则 $|\alpha|$ 的取值范围是 _____ .

分析：根据向量的几何意义，作出图 9.

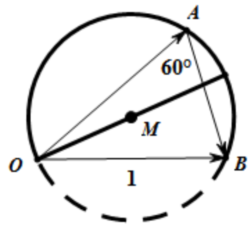


图9

因为 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 120°，即角 $A=60^\circ$，又 $OB=1$，与模型 1 吻合。因为点 A 在优弧 $\overset{\frown}{OB}$ 上，根据图形 $0<OA\le d$，又 $d=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $|\alpha|\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]$.

与立体几何的融合

例 4：已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$（如图 10），高为 2，异面直线 AB 与 B_1C_1 所成角为 60°，若直三棱柱的外接球半径为 $\sqrt{5}$，则四面体 ABB_1C_1 体积的最大值为____。

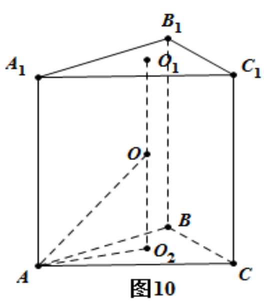


图10

分析：连接 ΔABC 的外心 O_2 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 的外心 O_1，取 O_1O_2 的中点 O，则 O 为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球心，所以 $R=OA=\sqrt{5}$，$OO_2=1$，由勾股定理得 $r=AO_2=2$，因为异面直线 AB 与 B_1C_1 所成角为 60°，所以 $\angle ABC=60^\circ$ 或 $\angle ABC=120^\circ$，$AC=2r\sin\angle ABC=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，因此点 B 在以 $AC=2\sqrt{3}$ 为弦长，以 $\angle ABC=60^\circ$ 或 $\angle ABC=120^\circ$ 为圆周角的圆上。所以当且仅当 $AB=BC$，即 ΔABC 为等边三角形时面积最大为 $3\sqrt{3}$，又 $V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，所以 $V_{A-BB_1C_1}\le\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$。

结束语

高中数学的学习，离不开大量做题，细细揣摩，我们可以发现在诸多地方都有这一数学几何模型的影子，用好这一模型，解题往往可以事半功倍。同时我们面对一个数学问题，要敢于专研，打破常规，从新的角度去理解，要观其形、究其本，力争由一题而通一类。

参考文献：

[1] 徐文艺 . 一道初等数学题解法的高观点思考 [J]. 高中数学教与学 ,2020,29(12):42–43.

[2] 陈建荣 . 从一道高考题到一个几何模型 [J]. 中学数学研究，2024,(9):38–40

[3] 赵永利 . 数形结合思想在高中数学中的应用 [J]. 数理化解题研究 ,2024,29(21):63–65

作者简介：姓名：陈燕萍（1989 年 2 月），性别：女，民族：汉，籍贯：义乌，职称：中学一级，学历：本科，学科：数学，研究方向：高中数学。