利用定积的分定义求极限

韩广发

江苏农林职业技术学院 基础部 江苏句容 212400

摘　要：本文通过剖析定积分定义与无限和式极限的本质联系，明确利用积分定义求极限时需满足的数量关系，并结合典型例题揭示如何通过解析这些数量关系确定积分上下限以及被积函数。

关键词：极限；定积分；被积函数；积分区间

1 引言

计算无限和式的极限是高等数学中的一类常见问题，常用方法包括夹逼定理、级数法、定积分法等。本文重点介绍利用定积分的定义求解无限和式极限的方法。为此，我们首先回顾定积分的定义 .

定义 1　设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，I 是一定数. 若对 $[a,b]$ 的任意分割 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\{\Delta x_i:i=1,2\cdots n\}$，都有 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

定积分的定义本身揭示了其与无限和式极限之间的紧密联系。利用定积分求解这类极限不仅是分析问题的重要手段之一，更是各类数学竞赛中的高频考点。但在实际应用中，许多初学者往往难以准确判断积分上下限和构建正确的被积函数，甚至对积分区间的分割数量也缺乏清晰认知。

值得强调的是，在将无限和式极限转化为定积分形式时，必须厘清以下关键的数量关系：

1．项数对应规则：积分区间的分割份数与极限表达式中和式的求和项数一致；

2．积分区间求法：积分上下限分别由极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1=a,\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=b$ 确定，且有 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$；

3．积分区间对应：通过累加各子区间长度求出的积分区间长度应等于由第 2 点中确定的积分上下限的差 $b-a$.

2 利用定积分定义求极限

由定积分定义可知，积分区间 $[a,b]$ 的分割方式及点 ξ_i 的选取均具有完全任意性。我们将在接下来的讨论中通过多案例说明，利用定积分定义求解极限问题时，对区间的分割方式不必采用等分形式，点 ξ_i 的选取也无需限定为小区间的端点或中点等特殊位置。解题过程中我们还将具体说明如何确定被积函数。

情形一：对区间做等距分割，ξ_i 取为小区间端点.

例 1　计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

解法一

取 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，$\xi_i=\dfrac{i}{n}$. 则积分下限 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，积分上限 $b=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}=1$.

显然满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$. 并且有 $x_{i-1}=\dfrac{i-1}{n}$，$x_i=\dfrac{i}{n}$. 可知 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 因此，积分区间、积分上下限和 ξ_i 符合引言中的数量关系.

由 $f(\xi_i)=\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\sqrt{1+\xi_i}$ 知，$f(x)=\sqrt{1+x}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

解法二

取 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$， $\xi_i=1+\frac{i}{n}$． 则积分下限 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$， 积分上限 $b=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n})=2$． 显然满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$．并且有 $x_{i-1}=1+\frac{i-1}{n}$， $x_i=1+\frac{i}{n}$．可知 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$．因此，积分区间、积分上下限和 ξ_i 符合引言中的数量关系．

由 $f(\xi_i)=\sqrt{\xi_i}$ 知，$f(x)=\sqrt{x}$．

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$．

由例 1 可以看出，利用定积分定义求极限时，被积函数以及 ξ_i 的选择并不是唯一的，只要被积分区间、积分上下限和 ξ_i 符合引言中给出的数量关系即可．

下面的例子中，我们不再逐一验证积分区间、积分上下限和 ξ_i 之间数量关系，感兴趣的读者可以自行验证．

情形二：对区间做等距分割， ξ_i 非小区间端点也非小区间中点．

例 2 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{2}{n^2+n-2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-n})．$$

这是一道可以利用夹逼定理求解的经典求极限问题．这里我们分别利用夹逼定理和定积分定义进行求解．

解法一 （夹逼定理）

因为 $\frac{i}{n^2+n-1}\le\frac{i}{n^2+n-i}\le\frac{i}{n^2+n-n}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n-1}=\frac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n-n}=\frac{1}{2}$，

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n-i}=\frac{1}{2}$．

解法二（定积分法）

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{2}{n^2+n-2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n-i}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+1-\frac{i}{n}}$$

取 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$， $\xi_i=\frac{i}{n+1-\frac{i}{n}}$． 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$， $a=0$， $b=1$， $x_{i-1}=\frac{i-1}{n}$， $x_i=\frac{i}{n}$． 且可证明 $\xi_i\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$，

故原式 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$．

情形三：对区间做非等距分割， ξ_i 非小区间端点，也非小区间中点．

例 3 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i^3-3i^2+i}{n^4}$．

此题我们分别利用连续自然数平方和、立方和公式，以及定积分的定义求解．

解法一 （代数法）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^3-3i^2+i}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n^2(n+1)^2}{4}-3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^4}$$
$$=\frac{1}{2}．$$

解法二（定积分法）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^3-3i^2+i}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}\cdot\frac{i^2-i}{n^2}$$

取 $\Delta x_i=\frac{2i-1}{n^2}$， $\xi_i=\frac{i^2-i}{n^2}$． 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$，

$a=0$，$b=1$，$x_{i-1}=\frac{(i-1)^2}{n^2}$，$x_i=\frac{i^2}{n^2}$. 且可证明 $\xi_i\in[\frac{(i-1)^2}{n^2},\frac{i^2}{n^2}]$，

故原式 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

情形四：先变换，再利用定积分定义求解.

例 4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)}{2n^4}$.

此题我们也是分别利用连续自然数平方和、立方和公式，以及定积分的定义求解. 但该例在利用定积分定义进行求解时，需先对原式作相应的处理.

解法一（代数变换）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)}{2n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4}=\frac{1}{4}.$$

解法二（定积分法）

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\{[\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2})+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2n^2}\cdot\frac{i}{n^2}]+[\frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2})]\}$$

对于极限

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2})+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2n^2}\cdot\frac{i}{n^2}]$$

取 $\Delta x_i=\frac{i}{n^2}$，$\xi_i=\frac{i(i+1)}{2n^2}$ $(i=1,2\cdots n-1)$，$\Delta x_n=\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2}$，$\xi_n=\frac{1}{2}$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$，$a=0$，$b=\frac{1}{2}$，$x_{i-1}=\frac{i(i-1)}{2n^2}$，$x_i=\frac{i(i+1)}{2n^2}$ $(i=1,2\cdots n-1)$，$x_n=\frac{1}{2}$，$f(\xi_i)=\frac{i(i+1)}{2n^2}$ $(i=1,2\cdots n-1)$，$f(\xi_n)=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 显然有 $\xi_i\in[\frac{(i-1)^2}{n^2},\frac{i^2}{n^2}]$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)}{2n^4}$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2})+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2n^2}\cdot\frac{i}{n^2}]$$

$$+\lim_{n\to\infty}[\frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2})]$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+0=\frac{1}{4}.$$

注 解法二中，若直接取 $\Delta x_i=\frac{i}{n^2}$ $(i=1,2\cdots n)$，$\xi_i=\frac{i(i+1)}{2n^2}$. 则 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$. 但此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\neq b-a$，且不为定数，不满足引言部分给出的数量关系. 因此，需对原式作如解法二中的变换。

我们对解法二中处理极限的方法进行推广，不难得到下述定理.

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，数列 $\{b_n\}_{n\in N}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，对于 $[a,b_n]$ 的一个分割 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{\Delta x_i\}=0$，且 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明由

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n$$

是 $[a,b_n]$ 的一个分割可知，

$a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n<b$

是 $[a,b]$ 的一个分割 . 记该分割的细度为 $\|T\|$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且对于 $[a,b_n]$ 的分割 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n$（$x_0=a$，$x_n=b_n$）有 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{\Delta x_i\}=0$，可知 $[a,b]$ 的分割 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n<b$

满足 $\lim_{n\to\infty}\|T\|=0$. 在 $[a,b]$ 的分割

$a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<b_n<b$

中，记 $x_0=a$ 、 $x_n=b_n$ 、 $x_{n+1}=b$, 并取

$\xi_{n+1}=b\in[x_n,x_{n+1}]$. 由函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 再由 $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ ，可知 $\lim_{n\to\infty}f(\xi_{n+1})\Delta x_{n+1}=0$. 因此， $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}f(\xi_i)\Delta x_i-f(\xi_{n+1})\Delta x_{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}f(\xi_i)\Delta x_i-\lim_{n\to\infty}f(\xi_{n+1})\Delta x_{n+1}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

利用上述定理容易求得极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2(i+1)}{2n^4}=\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{8} .$$

文献 [1] 中指出，利用定积分定义求极限时，积分区间不一定分割为 n 份. 这里我们给出另一个积分区间不是分割为 n 份的例子.

例 5 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{i}{n^4}$.

解法一（代数法）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{i}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2(1+n^2)}{2}}{n^4}=\frac{1}{2} .$$

解法二（定积分法）

由引言中陈述的数量关系的第一条“项数对应规则”可知，在利用定积分定义求解该极限时，积分区间被分为 n^2 份 . 将原求和表达式变形得 $\sum_{i=1}^{n^2}\frac{i}{n^4}=\sum_{i=1}^{n^2}\frac{i}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}$. 取 $\Delta x_i=\frac{1}{n^2}$ ， $\xi_i=\frac{i}{n^2}$ ，则积分下限 $a=\lim_{n\to\infty}\xi_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ ，积分上限 $b=\lim_{n\to\infty}\xi_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$. 显然满足 $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$.

由 $f(\xi_i)=\frac{i}{n^2}=\xi_i$ 知， $f(x)=x$.

故 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{i}{n^4}=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

3 结论

在利用定积分定义求极限时，积分区间不一定分割为 n 份，对积分区间的分割也不一定是等分， ξ_i 也不必取为小区间的端点、中点等特殊点，被积函数选择也不是唯一的. 只要积分区间、积分上下限和 ξ_i 满足引言部分给出的数量关系，所求极限即可转化为定积分求解。

参考文献：

[1] 陈桂东 . 利用定积分的定义求极限 [J]. 高等数学研究，2013,16:33–34.

[2] 高秋菊，刘宏，苏国强 . 关于定积分的演变与发展 [J]. 大学数学，2002,22(2):62–66.

[3] 淮乃存 . 利用定积分定义求数列极限 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版)，2003,31:30–33.

[4] 孙长军. 利用定积分定义求极限的几种情况探析 [J]. 广西民族师范学院学报，2012，29：8–10.

[5] 邱为钢 . 定积分计算探讨 [J]. 大学数学，2019,31(1):62–66.

[6] 黄永忠，王德荣，何涛 . 与定积分有关的极限 [J]. 大学数学，2019,35(2):71–77.

[7] 单法特，祝丽萍 . 高等数学竞赛中有关求极限问题的分析 [J]. 高等数学研究，2021,24:76–78.

[8] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis [M]. McGraw–Hill, 1976.

[9] Tom M. Apostol. Calculus [M]. John Wiley, 1967.

[10] 陈仲 . 高等数学竞赛解析教程 [M]. 东南大学出版社，2019.

[11] 余志坤 . 全国大学生数学竞赛解析教程 [M]. 科学出版社 , 2023.

基金项目: 江苏省高校公共课教改项目(2022JDKT122); 江苏农林职业技术学院教学研究项目（JK202305）

作者简介： 韩广发（1982– ）, 男，硕士，副教授，从事高等数学教学与研究 .Email:48053075@qq.com