线性正则变换相位恢复的稳定性研究

王文馨　王　渺　曾国庆
天津理工大学理学院　天津市　300384

摘　要：相位恢复的稳定性主要研究的是当无相位采样发生微小扰动时，原信号是否也只发生微小扰动的问题。本文主要研究了线性正则变换的相位恢复稳定性问题。通过讨论线性正则变换和Fourier变换之间的关系，在已有的Fourier变换相位恢复稳定性的结果基础上，给出了线性正则变换相位恢复稳定性的结论，即当函数和满足一定的条件时，$f-g$的二范数是可被控制的，即线性正则变换能被其相位绝对值所控制。

关键词：线性正则变换；相位恢复；Fourier 变换；稳定性

一、引言

相位恢复问题是目前应用很广泛的一类问题，它是通过函数或信号的测量值的绝对值来重构函数或信号。

目前相位恢复是很多领域的研究热点，其研究问题主要集中在以下三个方面：

（1）解的存在性问题，即相位恢复是否有解，是否能通过线性测量值的相位，即测量值的模，来恢复原来的函数或者信号。

（2）解的唯一性问题，即如果通过线性测量值能够找到解，解是否唯一，若唯一，是在什么情况下唯一？

（3）解的稳定性问题，如果由于仪器原因或实际情况导致测量值出现扰动，那么得到的解是否也和真实的解误差不大？

关于相位恢复解的存在性问题，很多学者从各个方面进行了研究。在有限维空间中，文章[1]证明了有限维空间 R^N 中的 $(2N-1)$ 个向量能够进行相位恢复，并且没有一组 $(2N-2)$ 个向量可以做到这一点，之后有大量的数学家研究了复数域情况和无限维空间的情况。在无限维空间中，有时需要从函数的Fourier变换的绝对值来恢复此函数。这种情况广泛应用于天文学、衍射成像、雷达、量子力学、语音识别等。其中衍射成像的测量设备通常只能捕获强度，即相位信息，也就是根据$\left|\hat{f}\right|$来找到f。在利用Fourier变换解决问题时，其难点在于通过仅知道Fourier变换的模$\left|\hat{f}\right|$来恢复函数f。根据函数Fourier变换的性质，我们知道恢复了$\hat{f}$等于恢复了f本身。因此通过$\left|\hat{f}\right|$来恢复$\hat{f}$或者f是相位恢复研究的热点问题。

关于相位恢复解的唯一性问题，事实上，相位恢复问题的解不唯一，它只能够在相差一个模为1的常数的意义下来恢复信号。这是因为在实数域下f和$-f$测量的相位是一样的，复数域下f和cf的测量值是一样的，其中$|c|=1$。

关于相位恢复解的稳定性，文章[2]研究了通过$\left|\hat{f}\right|$来恢复函数f的稳定性问题。事实上，易知函数 $f(x)$ 及其位移 $f(x+\varepsilon)$ 是不能通过其Fourier变换的模来区分。但当 $f,g\in L^2(R)$ 并且同时具有紧支集时，利用复分析，我们可以得到当$\left|\hat{f}\right|=|\hat{g}|$时，函数$f$和$g$满足一定的条件，就可以进行相位恢复，详细参考[3—7]。

在Fourier变换的相位恢复稳定性的研究问题中，若$\left|\hat{f}\right|$和$|\hat{g}|$在$L^2(R)$中接近，即$\left\|\left|\hat{f}\right|-\left|\hat{g}\right|\right\|_2\le\varepsilon$，是否$f$和$g$在$L^2(R)$中足够接近？文章[8]指出在不加任何额外条件时，这个稳定性是不成立的，但加上一些额外条件，稳定性就可以成立，详见[2]。本文将在文章[2]基础上，研究线性正则变换的相位恢复稳定性问题。

本文首先给出线性正则变换的定义及其相关知识，并给出Fourier变换相位恢复问题稳定性研究的已有结论，最后给出本文的主要结论。

二、基本知识和符号

下面我们将给出本论文需要的一些基础知识。首先我们给出Fourier变换的定义。

定义1　设函数 $f(x)\in L^1(R)$，则 $f(x)$ 的Fourier变换定义为

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x)e^{-ixu}dx$$

2020年大学生创新创业训练计划项目（202010060121），
国家自然科学基金资助项目（11971348）；
天津市自然科学基金资助项目（18JCYBJC16200）

紧接着，我们把Fourier变换推广到线性正则变换。

定义2 对于信号 $f(x)\in L^2(R)$，参数 $A=(a,b,c,d)$ 的线性正则变换（LCT）定义为

$$L_A f(u)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_A(u,x)dx & b\neq 0\\ \sqrt{d}e^{i\frac{cdu^2}{2}}f(du) & b=0\end{cases}$$

这里 $K_A(u,x)=A_b e^{\frac{i}{2b}(du^2-2xu+ax^2)}$ 且 $A_b=\sqrt{\frac{1}{2\pi|b|}}$。

不失一般性，我们假定 $b>0$。一般情况下，u 轴通常被认为是LCT域。反过来，通过推导可以得到逆LCT的变换为

$A^{-1}=(d,-b,-c,a)$，

即，$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} L_A f(u)K_{A^{-1}}(u\ x)du$。

关于线性正则变换和其他变换的关系，可通过下面表格获得详细信息。

表1 线性正则变换及其特殊情况

参数A	转换
$A=(a,b,c,d)$	线性正则变换（LCT）
$A=(0,1\ -1\ 0)$	Fourier变换（FT）
$A=(\cos a,\sin a,-\sin a,\cos a)$	分数Fourier变换（FRFT）
$A=(0,i,i,0)$	拉普拉斯变换（LT）
$A=(1,b,0,1)$	菲涅尔变换（FRST）
$A=(1,-ib,0,1),b\geq 0$	高斯–维尔斯特拉斯变换
$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,e^{-\frac{i\pi}{2}},-e^{-\frac{i\pi}{2}},1\right)$	巴格曼变换

定义3 对任何 $1\leq p<\infty$，函数 f 满足 $\|f\|_{L^p(R)}^p=\int_R |f(x)|^p dx<\infty$，则称 $f\in L^p(R)$。当 $p=\infty$，$f\in L^\infty(R)$ 表示 $\|f\|_{L^\infty(R)}=\mathrm{essup}_{x\in R}|f(x)|<\infty$。

文章[4]研究了相位恢复问题中如何从Fourier变换的绝对值 $|\hat{f}|$ 来恢复函数 f。文章[2]研究了对于 $1\leq p<2$，相位恢复在空间 $L^p(R)\cap L^2(R)$ 的稳定性，得到如下结果：

命题4[2] 对于 $1\leq p<2$，$f\in L^1(R)\cap L^2(R)$，定义 $h_f:R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$，

$$h_f(x)=\left(8\int_{|\hat{f}(\xi)|\leq 10x}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}+\begin{cases}x & 若p>1\\ 0 & 若p=1\end{cases}。$$

则对于所有的 $g\in L^1(R)\cap L^2(R)$，

$$\|f-g\|_{L^2(R)}\leq 2\left\||\hat{f}|-|\hat{g}|\right\|_{L^2(R)}+h_f\|f-g\|_{L^p(R)}+2\mathrm{Im}\left\|\mathrm{Im}\,f|f|^{-1}g\right\|_{L^2(R)}$$

并得到以下推论：

命题5[2] 设 $f\in L^1(R)\cap L^2(R)$ 在可测集 $L=\{\xi\in R:|\hat{f}(\xi)|\neq 0\}$ 上具有实值Fourier变换支集。对所有的 $g\in L^1(R)\cap L^2(R)$，有

$$\|f-g\|_{L^2(R)}\leq 2\left\||\hat{f}|-|\hat{g}|\right\|_{L^2(R)}+30\sqrt{L}\|f-g\|_{L^1(R)}+2\left\|Im\,\hat{g}\right\|_{L^2(R)}$$

三、主要结论及证明

我们首先通过一个引理来说明线性正则变换和Fourier变换之间的关系，从而得到相位恢复问题中用线性正则变换的绝对值 $|L_A f(u)|$ 来恢复函数 f 的稳定性问题。

引理6 设 $f(x)\in L^1(R)\cap L^2(R)$，$G_f(x)=f(x)e^{i\frac{a}{2b}x^2}$，则有以下关系

$$L_A f(u)=\frac{e^{i\frac{d}{2b}u^2}}{\sqrt{b}}\hat{G}_f\left(\frac{u}{b}\right)\cdot$$

证明：由定义2可知，$L_A f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_A(u,x)dx,\ b\neq 0$

且有 $K_A(u,x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi b}}e^{\frac{i}{2b}(du^2-2xu+ax^2)}$. 带入 $K_A(u,x)$ 得到

$$L_A f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{i\frac{a}{2b}x^2-i\frac{1}{b}xu+i\frac{d}{2b}u^2}dx$$

$$=\frac{e^{i\frac{d}{2b}u^2}}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\frac{1}{b}xu}e^{i\frac{a}{2b}x^2}dx$$

令 $G_f(x)=f(x)e^{i\frac{a}{2b}x^2}$，则有

$$L_A f(u)=\frac{e^{i\frac{d}{2b}u^2}}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}G_f(x)e^{-ix\frac{u}{b}}dx=\frac{e^{i\frac{d}{2b}u^2}}{\sqrt{b}}\hat{G}_f\left(\frac{u}{b}\right)$$

即 $L_A f(u)=\frac{e^{i\frac{d}{2b}u^2}}{\sqrt{b}}\hat{G}_f\left(\frac{u}{b}\right)$，结论得证。

现在我们来给出本文的主要结论。

定理7 对于 $1\leq p<2$，$f\in L^1(R)\cap L^2(R)$，定义 $h_f:R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$

$$h_f(x)=\left(8\int_{|L_A f(u)|\leq\frac{10x}{\sqrt{b}}}\left|L_A f(u)\right|^2 du\right)^{1/2}+\begin{cases}x & ifp>1\\ 0 & ifp=1.\end{cases}$$

则对于所有的 $g\in L^1(R)\cap L^2(R)$，

$$\|f-g\|_{L^2(R)}\leq 2\left\||L_A f|-|L_A g|\right\|_{L^2(R)}+h_f\|f-g\|_{L^p(R)}+2\left\|\mathrm{Im}\overline{L_A f}|L_A f|^{-1}L_A g\right\|_{L^2(R)}$$

证明：由引理6知

$$\int_R |L_A f\xi - L_A g(\xi)|^2 d\xi = \int_R \left| \frac{e^{i\frac{d}{2b}\xi^2}}{\sqrt{b}} \hat{G}_f\left(\frac{\xi}{b}\right) - \frac{e^{i\frac{d}{2b}\xi^2}}{\sqrt{b}} \hat{G}_g\left(\frac{\xi}{b}\right) \right|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{b}\int_R \left| \hat{G}_f\left(\frac{\xi}{b}\right) - \hat{G}_g\left(\frac{\xi}{b}\right) \right|^2 d\xi = \frac{1}{b}\int_R \left| \hat{G}_f\left(\frac{\xi}{b}\right) - \hat{G}_g\left(\frac{\xi}{b}\right) \right|^2 d\xi$$

（令 $\eta = \frac{\xi}{b} \Rightarrow \xi = b\eta$ ）

$$= \frac{1}{|b|}\int_R \left| \hat{G}_f(\eta) - \hat{G}_g(\eta) \right|^2 d(b\eta) = \int_R \left| \hat{G}_f(\eta) - \hat{G}_g(\eta) \right|^2 d\eta$$

因为$f,g \in L^1(R) \cap L^2(R)$，易知$G_f(x)$，$G_g(x) \in L^1(R) \cap L^2(R)$
由命题4知，

$$G_f - G_{g\,L^2(R)}$$

$$\le 2\left\| \left|\hat{G}_f\right| - \left|\hat{G}_g\right| \right\|_{L^2(R)} + h_{G_f}\left\|G_f - G_g\right\|_{L^p(R)} + 2\left\| \mathrm{Im}\widehat{\overline{G_f}}\left|\hat{G}_f\right|^{-1}\hat{G}_g \right\|_{L^2(R)} \quad (1)$$

易知，$\left\|G_f - G_g\right\|_{L^p(R)} = \left\|f - g\right\|_{L^p(R)}, 1 \le p \le 2$ 。（2）

在引理6中令 $t = \frac{u}{b} \Rightarrow u = bt$

则得到 $\hat{G}_f(t) = \sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A f(bt)$，故

$$\left| \left|\hat{G}_f\right| - \left|\hat{G}_g\right| \right|_{L^2(R)}$$

$$= \left(\int_R \left| \hat{G}_f t - \hat{G}_g(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_R \left| \sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A f(bt) - \sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A g(bt) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{b}\left(\int_R \left| L_A f(bt) - L_A g(bt) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_R \left| L_A f(u) - L_A g(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}$$

$= \left|L_A f\right| - \left|L_A g\right|_{L^2(R)}$ 。（3）
同时，

$$h_{G_f}(x) = \left(8\int_{|\hat{G}_f(\xi)| \le 10x} \left|\hat{G}_f(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{1/2} + \begin{cases} x & if \ p > 1 \\ 0 & if \ p = 1. \end{cases}$$

$$= \left(8\int_{|\sqrt{b}L_A f(bt)| \le 10x} \left|\sqrt{b}L_A f(bt)\right|^2 dt \right)^{1/2} + \begin{cases} x & if \ p > 1 \\ 0 & if \ p = 1. \end{cases}$$

$$= \left(8\int_{|L_A f(u)| \le \frac{10x}{\sqrt{b}}} \left|L_A f(u)\right|^2 du \right)^{1/2} + \begin{cases} x & if \ p > 1 \\ 0 & if \ p = 1. \end{cases}$$

和

$$\left| \mathrm{Im}\widehat{\overline{G_f}(t)}\left|\hat{G}_f(t)\right|^{-1}\hat{G}_g(t) \right|$$

$$= \left| \mathrm{Im}\sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A f(bt) \left|\sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A f(bt)\right|^{-1} \sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A g(bt) \right|$$

$$= \left| \mathrm{Im}\widehat{\overline{L_A f(bt)}}\left|L_A f(bt)\right|^{-1}\sqrt{b}L_A g(bt) \right|$$

$$\left\| \mathrm{Im}\widehat{\overline{G_f}}\left|\hat{G}_f\right|^{-1}\hat{G}_g \right\|_{L^2(R)}$$

$$= \left(\int_R \left| \mathrm{Im}\overline{L_A f(bt)}\left|L_A f(bt)\right|^{-1}\sqrt{b}L_A g(bt) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_R \left| \mathrm{Im}\overline{L_A f(u)}\left|L_A f(u)\right|^{-1} L_A g(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\| \mathrm{Im}\overline{L_A f}\left|L_A f\right|^{-1} L_A g \right\|_{L^2(R)}$$

把以上结果代入（1）式，即得到结果，证毕。

推论8 设 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 在可测集 $L = \{\xi \in R : |\widehat{G_f}(\xi)| \ne 0\}$ 上具有实值Fourier变换支集。对所有的 $g \in L^1(R) \cap L^2(R)$，有

$$\left\|f - g\right\|_{L^2(R)}$$

$$\le 2\left\| |L_A f| - |L_A g| \right\|_{L^2(R)} + 30\sqrt{L}\left\|f - g\right\|_{L^1(R)} + 2\left\| Ime^{-i\frac{d^2}{b}} L_A g \right\|_{L^2(R)}$$

证明：因为 $f,g \in L^1(R) \cap L^2(R)$，易知 $G_f(x)$，$G_g(x) \in L^1(R) \cap L^2(R)$

由命题5知，$G_f - G_{g\,L^2(R)}$

$$\le 2\left\| \left|\widehat{G_f}\right| - \left|\widehat{G_g}\right| \right\|_{L^2(R)} + 30\sqrt{L}\left\|G_f - G_g\right\|_{L^1(R)} + 2\left\| Im\widehat{G_g} \right\|_{L^2(R)}$$

由（2）（3）式可知，

$$\left\|G_f - G_g\right\|_{L^p(R)} = \left\|f - g\right\|_{L^p(R)}, 1 \le p \le 2,$$

$$\left\| \left|\widehat{G_f}\right| - \left|\widehat{G_g}\right| \right\|_{L^2(R)} = \left\| |L_A f| - |L_A g| \right\|_{L^2(R)} 。$$

而 $\left\|\mathrm{Im}\widehat{G_g}\right\|_{L^2(R)} = \left(\int_R \left| \mathrm{Im}\sqrt{b}e^{-i\frac{db}{2}t^2} L_A g(bt) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\int_R \left| \mathrm{Im}e^{-i\frac{d}{b}u^2} L_A g(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \mathrm{Im}e^{-i\frac{d}{b}\,2} L_A g(\bullet) \right\|_{L^2(R)},$$

代入上面的式子得到，

$$\left\|f - g\right\|_{L^2(R)}$$

$$\leq 2\left\| |L_A f| - |L_A g| \right\|_{L^2(R)} + 30\sqrt{L}\left\| f - g \right\|_{L^1(R)} + 2\left\| Im e^{-i\frac{d}{b}2} L_A g \right\|_{L^2(R)}$$

故得证。

参考文献：

[1] R. Balan, P.G. Casazza and D. Edidin, On signal reconstruction without noisy phase, Appl. and Compt. Harmon. Anal., 20(3),2006,345–356.

[2] S. Steinerbergeron，The stability of fourier phase retrieval, https://arxiv.org/pdf/2004.06671.pdf.

[3]P. Grohs, S. Koppensteiner, M. Rathmair. Phase Retrieval: Uniqueness and Stability, https://arxiv.org/pdf/1901.07911.pdf.

[4] E. J. Akutowicz. On the determination of the phase of a Fourier integral, I. Trans. Am. Math. Soc.,179 – 192, 1956.

[5] E. J. Akutowicz. On the determination of the phase of a Fourier integral. II. Proc. Amer. Math. Soc. 8,234 – 238, 1957.

[6] E. Hofstetter. Construction of time–limited functions with specified autocorrelation functions. IEEE Trans. Inf. Theory, 10,1964,119 – 126.

[7] A. Walther. The question of phase retrieval in optics. J Mod Opt, 10(1),1963,41 – 49.

[8] P. Grohs, S.Koppensteiner and M. Rathmair. Phase Retrieval: Uniqueness and Stability[J]. SIAM Review, 62(2), 2020,301–350.